

# MATEMÁTICA

## PRODUTOS NOTÁVEIS E RACIONALIZAÇÃO

## PRODUTOS NOTÁVEIS

Antes de iniciarmos o estudo de produtos notáveis, vamos recordar a propriedade distributiva.

$$(a+b).(a+b) = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b).(a-b) = a^2-ab-ab+b^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b+c).(a+b+c)=a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2$$

Somando os termos semelhantes:  $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

Notem que na propriedade distributiva: multiplicamos todos os termos (não se esquecendo das regras dos sinais) e somamos os termos semelhantes. A fim de economizar tempo e não ter de multiplicar termo a termo, utilizamos os produtos notáveis.

**Produtos Notáveis** são aqueles produtos que são freqüentemente usados e para evitar a multiplicação de termo a termo, existem algumas fórmulas que convém serem memorizadas.

1) **Soma pela diferença:** quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo.

$$(a + b).( a - b ) = a^2 - b^2$$

2) **Quadrado da soma:** quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3) **Quadrado da diferença:** quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Existem muitas outras fórmulas:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3 a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exs: 1)  $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

2)  $\frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{2}-2$

Calcule:

a)  $(2x - 1)^2 - (x - 2)^2 + 3.(1 - x^2) = [4x^2 - 4x + 1] - [x^2 - 4x + 4] + 3 - 3x^2 = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 4x - 4 + 3 - 3x^2 = 0$

$$b) (a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - [a^2 - 2ab + b^2] = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$$

Calcular  $(103)^2$ .

$$(103)^2 = (100 + 3)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10000 + 600 + 9 = 10609$$

### Produto da soma pela diferença de dois termos

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo termo.

Exemplos:

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$

$$(2a + 4)(2a - 4) = (2a)^2 - 4^2 = 4a^2 - 16$$

Calcular o produto 53.47.

$$53.47 = (50 + 3)(50 - 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$$

Desenvolver e reduzir:

$$x = (5a - 2)^2 + (5a + 2)^2 - (5a + 2)(5a - 2)$$

$$x = [25a^2 - 20a + 4] + [25a^2 + 20a + 4] - [25a^2 - 4] = 25a^2 + 12$$

A expressão  $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$  é igual a :

a)  $a^4 + b^4$

b)  $a^4 - b^4$

c)  $a^4 - 2ab + b^4$

d)  $a^4 + 2ab + b^4$

e)  $a^4 + 2ab^2 - b^4$

$$(a + b)(a - b)(a^2 + b^2) =$$

$$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a^2)^2 - (b^2)^2 = a^4 - b^4$$

alternativa correta : (b)

O polinômio  $(x + 5)(x - 5)(x^2 - 25)$  é idêntico a :

a)  $x^4 - 625$

b)  $x^4 + 625$

c)  $x^4 - 50x^2 + 625$

d)  $x^4 - 50x + 625$

e)  $x^4 + 50x^2 + 625$

$$(x + 5)(x - 5)(x^2 - 25) = (x^2 - 25)(x^2 - 25) =$$

$$= (x^2)^2 - 2x^2 \cdot 25 + 25^2 = x^4 - 50x^2 + 625$$

alternativa correta : (c)

Simplificando-se a expressão

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} \quad \text{obtem-se :}$$

a) 10

b) 25

c)  $10 - 2\sqrt{6}$

d)  $10 + 2\sqrt{6}$

e)  $10 + 4\sqrt{6}$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} =$$

$$= (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}} \times \frac{5 - 2\sqrt{6}}{5 - 2\sqrt{6}} =$$

$$= 2 + 2\sqrt{6} + 3 + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{25 - (2\sqrt{6})^2} =$$

$$= 5 + 2\sqrt{6} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{25 - 4 \cdot 6} = 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} = 10$$

alternativa correta : (a)

**Cubo da soma de dois termos**

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Exemplos:

a)  $(x + 1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b)  $(3a + 2)^3 = (3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3a \cdot 2^2 + 2^3 =$   
 $= 27a^3 + 3 \cdot 9a^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3a \cdot 4 + 8 = 27a^3 + 54a^2 + 36a + 8$

**Cubo da diferença de dois termos**

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) =$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exemplos:

a)  $(x - 1)^3 = x^3 - 3.x^2.1 + 3.x.1^2 - 1^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

b)  $(x - 2y)^3 = x^3 - 3.x^2.2y + 3.x.(2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$

Exercícios resolvidos:

a) O valor da expressão  $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$  é:

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2\sqrt{2} + 2 - (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 2 - 2 - \sqrt{2}}{2 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

b)  $\frac{1}{1 - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$  é igual a:

$$\frac{(-1)}{(-1)} \times \frac{1}{1 - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{-1}{-1 + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} =$$

$$= \frac{- (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{-\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}}{2 - 1} = \frac{-2\sqrt{2}}{1} = -2\sqrt{2}$$

c) Qual o valor da expressão

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} + \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} ?$$

$$\frac{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{(\sqrt{3})^2 + 2.1.\sqrt{3} + 1^2 + [(\sqrt{3})^2 - 2.1.\sqrt{3} + 1^2]}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} =$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Determine o valor das expressões:

a)  $(5 - \sqrt{2})^2 = 5^2 - 2.5.\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 25 - 10\sqrt{2} + 2 = 27 - 10\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 b) & (3+\sqrt{2})^2 + (3-\sqrt{2})^2 = \\
 & = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + [3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2] = \\
 & = 9 + 6\sqrt{2} + 2 + 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 22
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) & (\sqrt{m} - \sqrt{2} + x)(\sqrt{m} + \sqrt{2} - x) \text{ onde } m \geq 0 \\
 & = (\sqrt{m})^2 + \sqrt{m} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{m} \cdot x - \sqrt{2} \cdot \sqrt{m} - (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \cdot x + x \cdot \sqrt{m} + x \cdot \sqrt{2} - x^2 = \\
 & = m + \sqrt{2m} - \sqrt{m} \cdot x - \sqrt{2m} - 2 + \sqrt{2} \cdot x + x \cdot \sqrt{m} + x \cdot \sqrt{2} - x^2 = \\
 & = m + 2x\sqrt{2} - 2 - x^2
 \end{aligned}$$

Qual é o polinômio P que devemos adicionar a  $(x - 2)^3$  para obter  $(x + 3)^3$  ?

$$P + (x - 2)^3 = (x + 3)^3$$

$$P = (x + 3)^3 - (x - 2)^3$$

$$(x + 3)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 + 3^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

$$(x - 2)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) =$$

$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 15x^2 + 15x + 35$$

Dois números, x e y, são tais que  $x = 2a + 2$  e  $y = 2a$ . Sabendo que  $x^2 - y^2 = 20$ , determine o valor de a e o valor do quociente  $x : y$ .

$$x^2 - y^2 = 20$$

$$(2a + 2)^2 - (2a)^2 = 20$$

$$4a^2 + 8a + 4 - 4a^2 = 20$$

$$8a = 20 - 4$$

$$8a = 16$$

$$a = 16/8 = 2$$

$$x = 2 \cdot 2 + 2$$

$$x = 4 + 2 = 6$$

$$y = 2 \cdot 2 = 4$$

$$x : y = 6/4 = 3/2$$

Sabe-se que  $x^2 + y^2 = 25$  e que  $xy = 12$ .

Nessas condições, qual é o valor da expressão  $(x + y)^2$  ?

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\begin{aligned} &= x^2 + y^2 + 2xy \\ &= 25 + 2 \cdot 12 = 25 + 24 = 49 \end{aligned}$$

Dada a expressão  $(x^2 + 2y)^2$ , adicione a ela o polinômio  $x^4 - y^2 - 3x^2y$ . Qual é o polinômio que você vai obter?

$$\begin{aligned} (x^2 + 2y)^2 &= x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot 2y + 4y^2 \\ &= x^4 + 4x^2y + 4y^2 \\ x^4 + 4x^2y + 4y^2 + x^4 - y^2 - 3x^2y &= 2x^4 + x^2y + 3y^2 \end{aligned}$$

Calcular o valor numérico das seguintes expressões

$$\begin{aligned} 1) \quad &7a^2b + 4ab^2 + 3a^3 + (2ab - b) \cdot b^2 = \text{para } a = 3 \text{ e } b = 2 \\ &= 7 \cdot 3^2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^3 + (2 \cdot 3 \cdot 2 - 2) \cdot 2^2 = \\ &= 126 + 48 + 81 + 40 = 295 \end{aligned}$$

## RACIONALIZAÇÃO

Existem frações cujo denominador é irracional. Como:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad , \quad \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Para facilitar os cálculos, é conveniente transformá-las em uma outra, equivalente, de denominador racional.

**1º Caso:** • O denominador é da forma  $\sqrt{b}$ . Neste caso, basta multiplicar o numerador e o denominador por

$$\sqrt{b}. \quad \text{Ex: } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**2º caso:** • O denominador é da forma  $a\sqrt[n]{b^m}$  onde  $n > 2$ . Neste caso, devemos multiplicar o numerador e o denominador por um fator, de modo a tornar no denominador, o expoente do radicando igual ao índice do radical.

Ex:  $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$  » Fator racionalizante =  $\sqrt[3]{2^2}$

Logo:  $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2}$

### 3º Caso:

• O denominador possui uma destas formas:  $a \pm \sqrt{b}$  ou  $\sqrt{a \pm b}$

Neste caso, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo **\*conjugado** de denominador. Assim, obteremos o produto pela diferença, que resulta na diferença de dois quadrados.

\*Conjugado:

Expressão	Conjugado
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exs: 1)  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

2)  $\frac{2}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 2\sqrt{2} - 2$