MATEMÁTICA

TRIGONOMETRIA

TRIGONOMETRIA

A palavra **TRIGONOMETRIA** é formada por 3 radicais gregos : **TRI** (três) , **GONO** (ângulos) e **METRIA** (medida). Atualmente a trigonometria não se limita apenas a estudar triângulos ; sua aplicação se estende a outros campos da atividade humana como a eletricidade , a mecânica , a acústica , a música etc.

Funções circulares

As funções circulares constituem o objeto fundamental da trigonometria circular e são importantes devido à sua periodicidade pois elas podem representar fenômenos naturais periódicos, como as variações da temperatura terrestre, o comportamento ondulatório do som, a pressão sanguínea no coração, os níveis de água dos oceanos, etc.

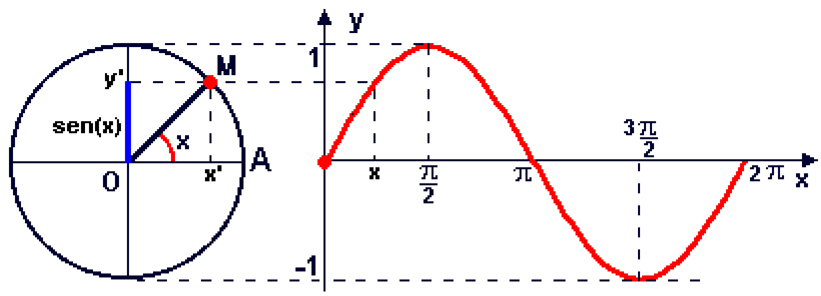
Função seno

Dado um ângulo de medida x, a *função seno* é a relação que associa a cada x em R, o seno do ângulo x, denotado pelo número real sen(x). A função é denotada por f(x)=sen(x) ou y=sen(x).

Segue uma tabela com valores de f no intervalo [0,2π].

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
y	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0

Gráfico: Na figura, o segmento Oy' que mede sen(x), é a projeção do segmento OM sobre o eixo OY.



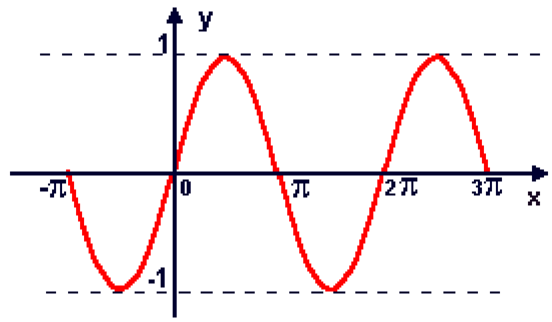
Propriedades da função seno

1. Domínio: A função seno está definida para todos os valores reais, sendo assim Dom(sen)=R.
2. Imagem: O conjunto imagem da função seno é o intervalo I={y em R: $-1 \leq y \leq 1$}
3. Periodicidade: A função é periódica de período 2π. Para todo x em R e para todo k em Z:

$$\boxed{\text{sen}(x) = \text{sen}(x+2\pi) = \text{sen}(x+4\pi) = ... = \text{sen}(x+2k\pi)}$$

A função seno é periódica de período fundamental T=2π.

Completamos o gráfico da função seno, repetindo os valores da tabela em cada intervalo de medida 2π.



4. Sinal:

Intervalo	[0,π/2]	[π/2,π]	[π,3π/2]	[3π/2,2π]
Função seno	positiva	positiva	negativa	negativa

5. Monotonicidade:

Intervalo	[0,π/2]	[π/2,π]	[π,3π/2]	[3π/2,2π]
Função seno	crescente	decrescente	decrescente	crescente

6. Limitação: O gráfico de y=sen(x) está inteiramente contido na faixa do plano

situada entre as retas horizontais y=-1 e y=1. Para todo x real temos:

$$-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$$

7. Simetria: A função seno é ímpar, pois para todo x real, tem-se que:

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$$

Função cosseno

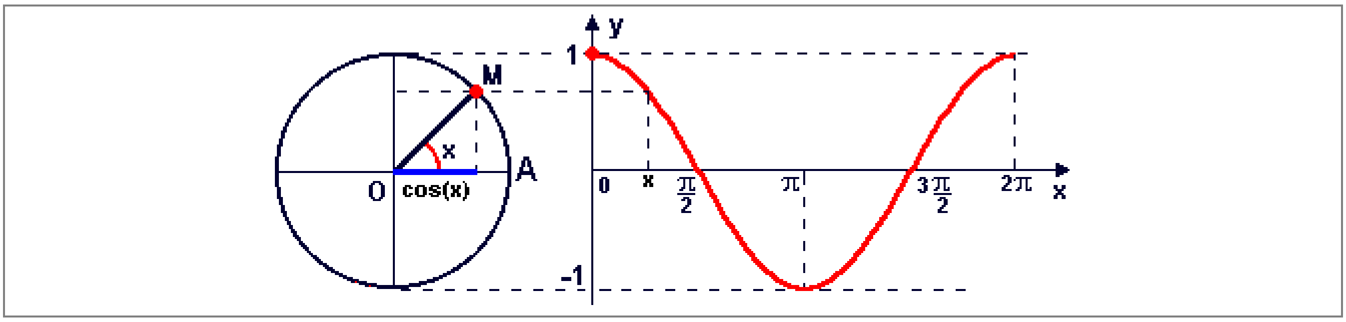
Dado um ângulo de medida x, a *função cosseno* é a relação que associa a cada x em R o número real cos(x).

Esta função é denotada por f(x)=cos(x) ou y = cos(x).

Segue uma tabela com valores de f no intervalo [0,2π].

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
y	0	1	não existe	-1	0	1	não existe	-1	0

Gráfico: O segmento Ox, que mede cos(x), é a projeção do segmento OM sobre o eixo horizontal OX.

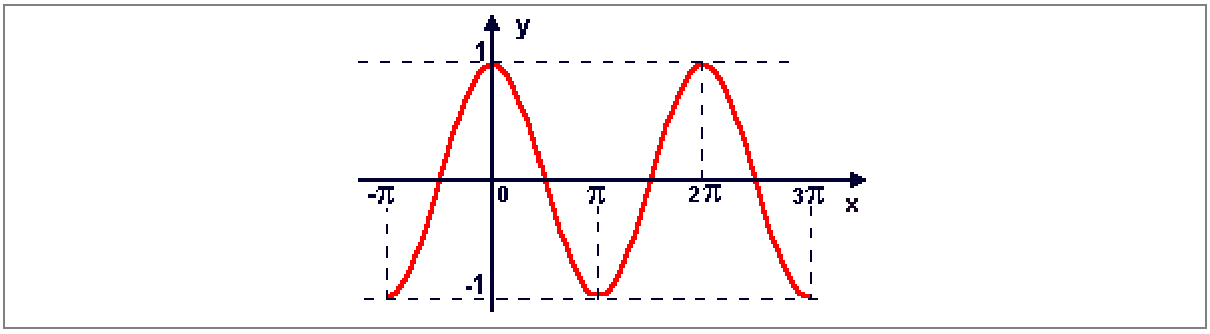


Propriedades da função cosseno

1. Domínio: A função cosseno está definida para todos os valores reais, assim Dom(cos)=R.
2. Imagem: O conjunto imagem da função cosseno é o intervalo I={y em R: $-1 \leq y \leq 1$}
3. Periodicidade: A função é periódica de período 2π. Para todo x em R e para todo k em Z:

$$\cos(x)=\cos(x+2\pi)=\cos(x+4\pi)=...=\cos(x+2k\pi)$$

A função cosseno é periódica de período fundamental $T=2\pi$.



4. Sinal:

Intervalo	$[0,\pi/2]$	$[\pi/2,\pi]$	$[\pi,3\pi/2]$	$[3\pi/2,2\pi]$
Função cosseno	positiva	negativa	negativa	positiva

5. Monotonicidade:

Intervalo	$[0,\pi/2]$	$[\pi/2,\pi]$	$[\pi,3\pi/2]$	$[3\pi/2,2\pi]$
Função cosseno	decrescente	decrescente	crescente	crescente

6. Limitação: O gráfico de y=cos(x) está inteiramente contido na faixa do plano situada entre as retas horizontais y=-1 e y=1. Para todo x real temos:

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

7. Simetria: A função cosseno é par, pois para todo x real, tem-se que:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

Função tangente

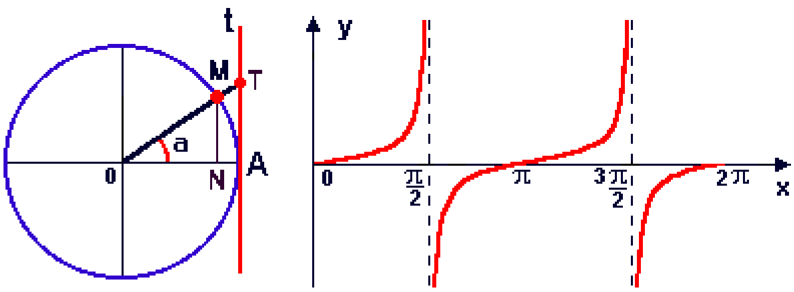
Como a tangente não existe para arcos da forma (k+1)π/2 onde k está em Z, estaremos considerando o conjunto dos números reais diferentes destes valores. Definimos a *função tangente* como a relação que associa a este x real, a tangente de x, denotada por tan(x).

f(x) = tg(x) = sen(x) / cos(x)

Segue uma tabela com valores de f no intervalo [0,2π].

x	0	π/4	π/2	3 π/4	π	5π/4	3π/2	7π/4	2π
y	0	1	não existe	-1	0	1	não existe	-1	0

Gráfico: O segmento AT, mede tan(x).



Pelo gráfico, notamos que quando a medida do arco AM está próximo de π/2 (ou de -π/2), a função tangente cresce muito rapidamente, pois a reta que passa por OM tem coeficiente angular cada vez maior vai se tornando cada vez mais vertical e a interseção com a reta t vai ficando mais distante do eixo OX.

Propriedades

1. Domínio: Como a função cosseno se anula para arcos da forma π/2+kπ, onde k em Z, temos

Dom(tan)={x em R: x diferente de π/2+kπ}

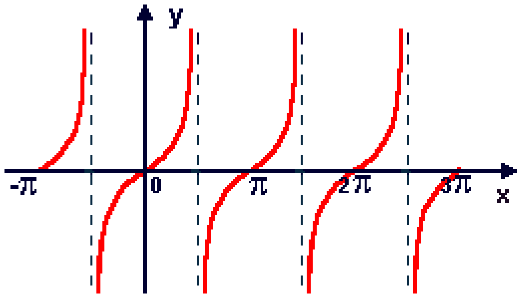
2. Imagem: O conjunto imagem da função tangente é o conjunto dos números reais, assim I=R.
3. Periodicidade A função é periódica e seu período é π

   Para todo x em R, sendo x diferente de π/2+kπ, onde k pertence a Z

   tan(x)=tan(x+π)=tan(x+2π)=...=tan(x+kπ)

   A função tangente é periódica de período fundamental T=π.

Podemos completar o gráfico da função tangente, repetindo os valores da tabela na mesma ordem em que se apresentam.



4. Sinal:

Intervalo	[0, π/2]	[π/2, π]	[π,3π/2]	[3π/2,2π]
Função tangente	positiva	negativa	positiva	negativa

5. Monotonicidade: A tangente é uma função crescente, exceto nos pontos x=kπ/2, k inteiro, onde a função não está definida.
6. Limitação: A função tangente não é limitada, pois quando o ângulo se aproxima de (2k+1)π/2, a função cresce (ou decresce) sem controle.
7. Simetria: A função tangente é ímpar, pois para todo x real onde a tangente está definida, tem-se que:

$$\tan(x)=-\tan(-x)$$

Função cotangente

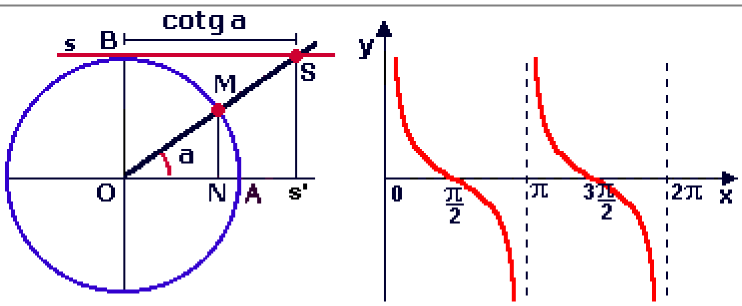
Como a cotangente não existe para arcos da forma (k+1)π onde k é um inteiro, estaremos considerando o conjunto dos números reais diferentes destes valores. Definimos a *função cotangente* como a relação que associa a cada x real, a cotangente de x, denotada por:

$$f(x)=\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

Segue uma tabela com valores de f no intervalo [0,2π].

x	0	π/4	π/2	3 π/4	π	5π/4	3π/2	7π/4	2π
y	não existe	1	0	-1	não existe	1	0	-1	não existe

Gráfico: O segmento Os' mede cot(x).



Observando no gráfico o que ocorre quando a medida do arco AM está próxima de π(ou -π), podemos verificar que o gráfico da função cotangente cresce muito raπdamente, pois a reta que passa por OM vai ficando cada vez mais horizontal e a sua interceção com a reta s vai se tornando muito longe.

Propriedades

1. Domínio: Como a função seno se anula para arcos da forma π+kπ, onde k em Z, temos

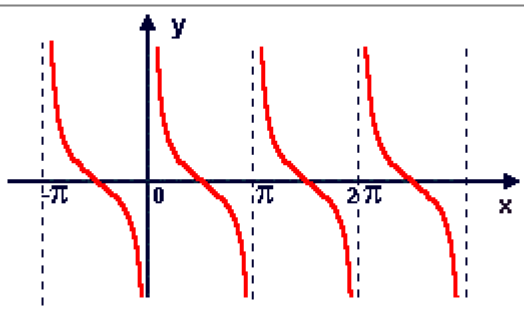
Dom(cot)={x em R: x é diferente de (k+1)π}

2. Imagem: O conjunto imagem da função cotangente é o conjunto dos números reais, assim I=R.
3. Periodicidade A função é periódica e seu período é π

   Para todo x em R, sendo x diferente de π+kπ, onde k em Z

   cot(x)=cot(x+π)=cot(x+2π)=...=cot(x+kπ)

   A função cotangente é periódica de período fundamental 2π.



4. Sinal:

Intervalo	[0,π/2]	[π/2,π]	[π,3π/2]	[3π/2,2π]
Função tangente	positiva	negativa	positiva	negativa

5. Monotonicidade: A cotangente é uma função sempre decrescente, exceto nos pontos x=kπ, k inteiro, onde a função não está definida.
6. Limitação: A função cotangente não é limitada, pois quando o ângulo se aproxima de kπ/2, a função cresce (ou decresce) sem controle.

7. Simetria: A função tangente é ímpar, pois para todo x real, tem-se que:

$$\cot(x)=-\cot(-x)$$

Função secante

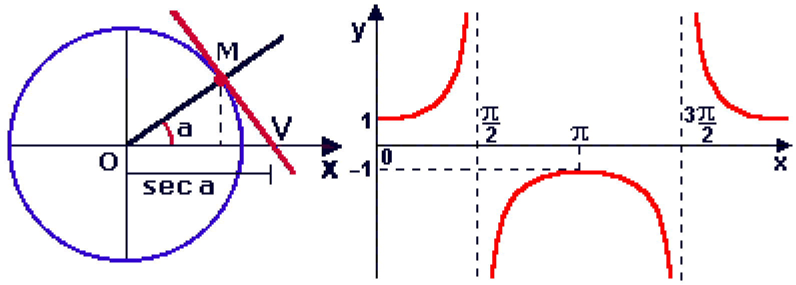
Como a secante não existe para arcos da forma $(2k+1)\pi/2$ onde k em Z, estaremos considerando o conjunto dos números reais diferentes destes valores. Definimos a *função secante* como a relação que associa a este x real, a secante de x, denotada por sec(x).

$$f(x)=\sec(x)=\frac{1}{\cos(x)}$$

Segue uma tabela com valores de f no intervalo $[0,2\pi]$.

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
y	1	$\sqrt{2}$	não existe	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	não existe	$\sqrt{2}$	1

Gráfico: O segmento OV mede sec(x).



Quando x assume valores próximos de $\pi/2$ ou de $3\pi/2$, cos(x) se aproxima de zero e a fração 1/cos(x) em valor absoluto, tende ao infinito.

Propriedades

1. Domínio: Como a função cosseno se anula para arcos da forma $\pi/2+k\pi$, onde k em Z, temos

$$Dom(\sec)=\{x \text{ em } R: x \text{ é diferente de } (2k+1)\pi/2\}$$

2. Imagem: Para todo x pertencente ao domínio da secante, temos que $\sec(x) \leq -1$ ou $\sec(x) \geq 1$, assim o conjunto imagem da secante é dado pelos conjuntos:

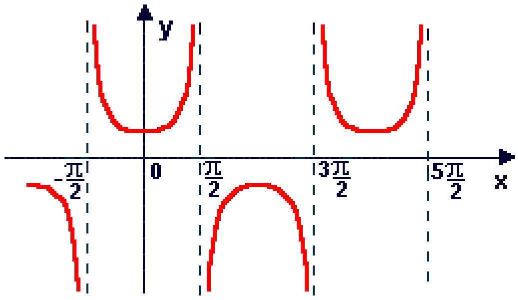
$$Im(\sec)=\{y \text{ em} R: y \leq -1 \quad \text{ou} \quad y \geq 1\}$$

3. Periodicidade A função é periódica e seu período é 2π

Para todo x em R, sendo x diferente de π+kπ, onde k em Z

sec(x)=sec(x+2π)=sec(x+4π)=...=sec(x+2kπ),

por este motivo, a função secante é periódica e seu período é 2π, podemos então completar o gráfico da secante, repetindo os valores da tabela na mesma ordem em que se apresentam.



4. Sinal:

Intervalo	[0,π/2]	[π/2,π]	[π,3π/2]	[3π/2,2π]
Função secante	positiva	negativa	negativa	positiva

5. Monotonicidade:

Intervalo	[0,π/2]	[π/2,π]	[π,3π/2]	[3π/2,2π]
Função secante	crescente	crescente	decrescente	decrescente

6. Limitação: A função secante não é limitada, pois quando o ângulo se aproxima de (2k+1)π/2, a função cresce (ou decresce) sem controle.

7. Simetria: A função secante é par, pois para todo x onde a secante está definida, tem-se que:

sec(x)=sec(-x)

Função cossecante

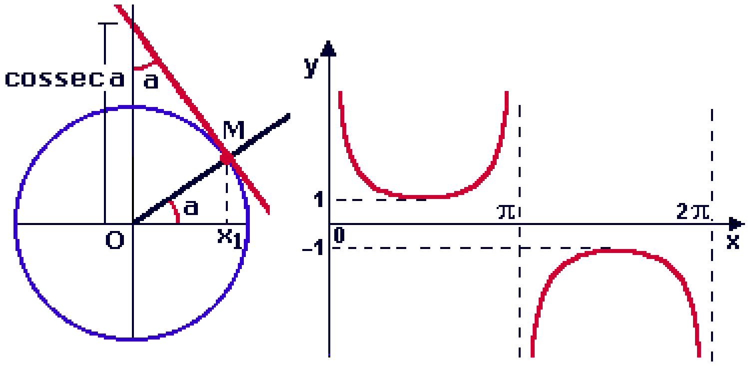
Como a cossecante não existe para arcos da forma kπ onde k em Z, estaremos considerando o conjunto dos números reais diferentes destes valores. Definir a *função cossecante* como a relação que associa a este x real, a cossecante de x, denotada por csc(x)

$$f(x) = \csc(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

Segue uma tabela com valores de f no intervalo [0,2π].

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
y	não existe	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	não existe	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	não existe

Gráfico: O segmento OU mede csc(x).



Quando x assume valores próximos de 0, π ou de 2π, sen(x) se aproxima de zero e a fração 1/sen(x) em valor absoluto, tende ao infinito. Propriedades

1. Domínio: Como a função seno se anula para arcos da forma kπ, onde k em Z, temos

   Dom(csc)={x em R: x diferente de kπ}

2. Imagem: Para todo x pertencente ao domínio da cossecante, temos que csc(x)$\leq$-1 ou csc(x)$\geq$1, assim o conjunto imagem da cossecante é dado pelos conjuntos:

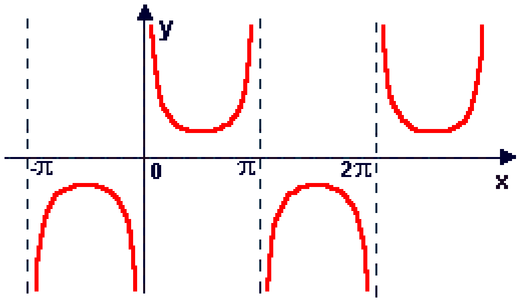
   Im(csc)={y em R: y $\leq$ -1 ou y $\geq$ 1}

3. Periodicidade: A função é periódica e seu período é 2π

   Para todo x em R, sendo x diferente de kπ, onde k em Z

   csc(x)=csc(x+π)=csc(x+2π)=...=csc(x+kπ)

   por este motivo, a função cossecante é periódica e seu período é 2π, podemos então completar o gráfico da secante, repetindo os valores da tabela na mesma ordem em que se apresentam.



4. Sinal:

Intervalo	$[0,\pi/2]$	$[\pi/2,\pi]$	$[\pi,3\pi/2]$	$[3\pi/2,2\pi]$
Função cossecante	positiva	positiva	negativa	negativa

5. Monotonicidade:

Intervalo	$[0,\pi/2]$	$[\pi/2,\pi]$	$[\pi,3\pi/2]$	$[3\pi/2,2\pi]$
Função cossecante	decrescente	crescente	crescente	decrescente

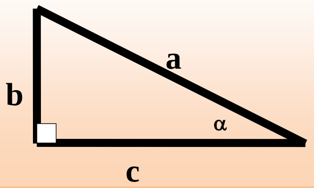
6. Limitação: A função cossecante não é limitada, pois quando o ângulo se aproxima de $k\pi$, a função cresce (ou decresce) sem controle.

7. Simetria: A função secante é ímpar, pois para todo x onde a cossecante está definida, tem-se que:

csc(x)=-csc(-x)

	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sen					
cos					
tg					
cotg					
sec					
cossec					

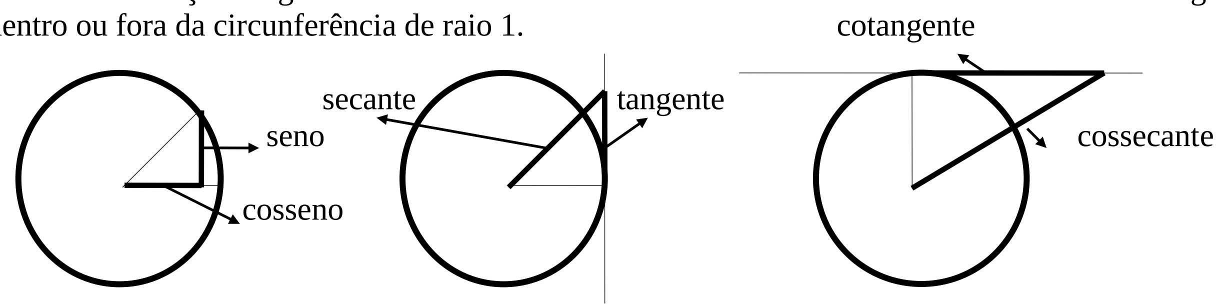
Lembrete : $a^2 = b^2 + c^2$



senα = CO / hip = b / a

cosα = CA / hip = c / a

As funções trigonométricas são na realidade medidas referentes a um determinado ângulo dentro ou fora da circunferência de raio 1.



1) $sen^2x + cos^2x = 1$

2) $sec^2x = 1 + tg^2x$

3) $cossec^2x = 1 + cotg^2x$

4) tgx = senx / cosx

5) cotgx = cosx / senx = 1 / tgx

6) secx = 1 / cosx

7) cossecx = 1 / senx

ADIÇÃO DE ARCOS

8) sen (a ± b) = sena . cosb ± senb . cosa

9) cos (a ± b) = cosa . cosb ∓ sena . senb

10) $tg\,(a \pm b) = \dfrac{tga \pm tgb}{1 \mp tga \cdot tgb}$

RELÓGIO (angulo entre ponteiros)

$$\hat{A} = \frac{60h - 11m}{2}$$

Sendo: h=horas e m=minutos

Obs. Na multiplicação de arcos ex: sen 2a podemos usar as mesmas fórmulas da adição sen (a+a)

Exercícios e Testes de Vestibular :

01) Transformar para graus :

a) $\pi/3$	b) 3π	c) $5\pi/6$	d) $4\pi/3$

02) Transformar para radianos :

a) 120^o	b) 210^o	c) 45^o

03) Sendo $\cos x = -\sqrt{2}/2$ e $\pi < x < 3\pi/2$, calcule :

a) senx b) tgx c) secx

d) cossecx e) $1 - \cos^2 x$ f) $1 - \text{sen}^2 x$

04) Sendo $\cos x = -\sqrt{3}/2$ e $\pi < x < 3\pi/2$, calcule :

a) senx b) tgx c) cotgx

05)(UFRGS-2002)- Se tan? = 3 e 0 < ? < 90^0 , então o valor de **cos** ? é
a) 1/10
b) $\sqrt{3}/10$
c) 3/10
d) $\sqrt{10}/10$
e) 1

06)(UFRGS) Os valores de x que satisfazem simultaneamente as igualdades : secy = $\sqrt{x+2}$ e tgy = (1 + x) / 2 são :

07)(UFRGS) O valor máximo de 3 - cosx no intervalo [$3\pi/2$; 2π] é :

08)(UFRGS) Os valores que m pode assumir para que exista o arco x satisfazendo a igualdade senx = m - 4 , são ?

09)(UFRGS) Sendo secx = $-\sqrt{7}/2$, determinando o cosx encontramos.

Redução ao 1^o quadrante :

10) $sen(\pi/2 + \alpha)$ =..................**11)** $cos(\pi/2 + \alpha)$ =.......................**12)** $tg(\pi/2 + \alpha)$ =................
13) $sec(3\pi/2 + \alpha)$ =................**14)** $sen(3\pi/2 + \alpha)$ = ...**15)** $cos(3\pi/2 + \alpha)$ =..........
16) $tg(3\pi/2 - \alpha)$ =...................**17)** $cossec(3\pi/2 - \alpha)$ = ...**18)** $sen(\pi + \alpha)$ =................
19) $cos(\pi + \alpha)$ =.....................**20)** $tg(\pi + \alpha)$ =............................**21)** $cos(\pi - \alpha)$ =.................
22) $sec(\pi - \alpha)$ =......................**23)** $tg(\pi - \alpha)$ =............................**24)** $cos(-\alpha)$ =.....................
25) $cos210^o$ =.........................**26)** $sen1290^o$ =............................**27)** $sen120^o$ =.....................
28) $cos150^o$ =.........................**29)** $tg\ 315^o$ =...............................**30)** $sec135^o$ =.....................
31) $sen1920^o$..........................

32) (UFRGS) A expressão $\dfrac{sen(\pi + x) . cos(\pi/2 + x)}{cos(3\pi/2 + x)}$ para x = 45^o é :

33) (UFRGS) O valor da expressão $\dfrac{tg(\pi + \alpha) . cos(\pi - \alpha)}{sec\alpha}$ para $\alpha = \pi/3rd$ é :

Faça o esboço do gráfico de cada função e determine sua imagem , domínio e período :

34) f (x) = sen2x **35)** f (x) = senx/2 **36)** f (x) = 5 . sen2x/3

37) f (x) = -1 + 3 . senx **38)** y = - senx **39)** y = - cosx

40) y = - 3 + 2cosx **41)** y = 2 - 3cosx

42) (UFRGS) - Se o ponteiro menor de um relógio percorre um arco de $\pi/12$rad ,
o ponteiro maior percorre um arco de

43) (UFRGS) - Considere as afirmativas abaixo.
I. tan 92º = - tan 88º
II. tan 178º = tan 88º
III. tan 268º = tan 88º
IV. tan 272º = - tan 88º
Quais estão corretas?
a) Apenas I e III.
b) Apenas III e IV.
c) Apenas I, II e IV.
d) Apenas I, III e IV.
e) Apenas II, III e IV.

44) (PUCRS) O conjunto solução da equação tan(x) = sec(x) em [0, π 2] é
A) IR
B) {π/2}
C) {-π2, π/2}
D) { x∈ IR | x= π/2+kπ, k∈ Z }
E) { }

43) (UFRGS-2010) - período da função definida por f(x) = sen $\left[3x - \frac{\pi}{2}\right]$ é

Respostas : 01) 60º , 540º , 150º , 240º 02) 2π/3 , 7π/6 , π/4 03) -$\sqrt{2}$ / 2 , 1 , -$\sqrt{2}$, -$\sqrt{2}$, 1/2 , 1/2 04) -1/2 , $\sqrt{3}$ / 3 , $\sqrt{3}$ 05) d 06) 3 , -1 07) 3 08) 3 ≤ m ≤ 5 09) -2 $\sqrt{7}$ /7 10) cosα 11) -senα 12) -cotgα 13) cossecα 14) -cosα 15) senα 16) cotgα 17) -secα 18) -senα 19) -cosα 20) tgα 21) -cosα 22) -secα 23) -tgα 24) cosα 25) -$\sqrt{3}$/2 26) -1/2 27) $\sqrt{3}$/ 2 28)-$\sqrt{3}$/2 29) -1 30)-$\sqrt{2}$ 31) $\sqrt{3}$/2 32) $\sqrt{2}$ / 2 33) -$\sqrt{3}$/4 34) P = π ; Im = [-1 , 1] ; D = R 35) P = 4π ; Im = [-1 , 1] ; D = R 36) P = 3π ; Im = [-5 , 5] ; D = R 37) P = 2π ; Im = [-4 , 2] ; D = R 38) P = 2π ; Im = [-1 , 1] ; D = R 39) P = 2π ; Im = [-1 , 1] ; D = R 40) P = 2π ; Im = [-5 , -1] ; D = R 41) P =2π ; Im = [-1 , 5] ; D = R 42) π rad 43) d 44)e 45)b