# MATEMÁTICA

# LÓGICA MATEMÁTICA

## INTRODUÇÃO

Neste roteiro, o principal objetivo será a investigação da validade de **ARGUMENTOS**: conjunto de enunciados dos quais um é a **CONCLUSÃO** e os demais **PREMISSAS**. Os argumentos estão tradicionalmente divididos em **DEDUTIVOS** e **INDUTIVOS**.

**ARGUMENTO DEDUTIVO:** é válido quando suas premissas, se verdadeiras, a conclusão é também verdadeira.

Premissa : "Todo homem é mortal."
Premissa : "João é homem."
Conclusão : "João é mortal."
Esses argumentos serão objeto de estudo neste roteiro.

**ARGUMENTO INDUTIVO:** a verdade das premissas não basta para assegurar a verdade da conclusão.
Premissa : "É comum após a chuva ficar nublado."
Premissa : "Está chovendo."
Conclusão: "Ficará nublado."
Não trataremos do estudo desses argumentos neste roteiro.

As premissas e a conclusão de um argumento, formuladas em uma linguagem estruturada, permitem que o argumento possa ter uma análise lógica apropriada para a verificação de sua validade. Tais técnicas de análise serão tratadas no decorrer deste roteiro.

## CÁLCULO PROPOSICIONAL

Como primeira e indispensável parte da Lógica Matemática temos o ***CÁLCULO PROPOSICIONAL*** ou ***CÁLCULO SENTENCIAL*** ou ainda ***CÁLCULO DAS SENTENÇAS***.

---

**CONCEITO DE PROPOSIÇÃO**

***PROPOSIÇÃO***: **sentenças declarativas afirmativas** (expressão de uma linguagem) da qual tenha sentido afirmar que seja verdadeira ou que seja falsa.

- A lua é quadrada.
- A neve é branca.
- Matemática é uma ciência.

Não serão objeto de estudo as sentenças interrogativas ou exclamativas.

---

## OS SÍMBOLOS DA LINGUAGEM DO CÁLCULO PROPOSICIONAL

• ***VARIÁVEIS PROPOSICIONAIS***: letras latinas minúsculas **p**,**q**,**r**,**s**,.... para indicar as proposições (fórmulas atômicas) .
***Exemplos***: A lua é quadrada : **p**
A neve é branca : **q**

• ***CONECTIVOS LÓGICOS***: As fórmulas atômicas podem ser combinadas entre si e, para representar tais combinações usaremos os conectivos lógicos :

$\wedge$: **e** , $\vee$: **ou** , $\rightarrow$ : **se...então** , $\leftrightarrow$ : **se e somente se** , ~: **não**

***Exemplos***:

• A lua é quadrada **e** a neve é branca. : $p \wedge q$ (p e q são chamados **conjunctos**)

• A lua é quadrada **ou** a neve é branca. : $p \vee q$ ( p e q são chamados **disjunctos**)

• **Se** a lua é quadrada **então** a neve é branca. : $p \rightarrow q$ ( p é o **antecedente** e q o **conseqüente**)

• A lua é quadrada **se e somente se** a neve é branca. : $p \leftrightarrow q$

• A lua **não** é quadrada. : $\sim p$

• ***SÍMBOLOS AUXILIARES*** : **( )** , parênteses que servem para denotar o "alcance" dos conectivos;

***Exemplos***:

• **Se** a lua é quadrada **e** a neve é branca **então** a lua **não** é quadrada. :
$((p \wedge q) \rightarrow \sim p)$

• A lua **não** é quadrada **se e somente se** a neve é branca. :
$((\sim p) \leftrightarrow q))$

• ***DEFINIÇÃO DE FÓRMULA*** :
1. Toda **fórmula atômica**é uma fórmula.
2. Se **A** e **B** são fórmulas então
$(A \vee B)$ , $(A \wedge B)$ , $(A \rightarrow B)$ , $(A \leftrightarrow B)$ e $(\sim A)$ também são fórmulas.
3. São fórmulas apenas as obtidas por 1. e 2. .

Os parênteses serão usados segundo a seguinte ordem dos conectivos: $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ .

Com o mesmo conectivo adotaremos a convenção pela **direita**.

***Exemplo***: a fórmula $p \vee q \wedge \sim r \rightarrow p \rightarrow \sim q$ deve ser entendida como
$(((p \vee q) \wedge (\sim r)) \rightarrow ( p \rightarrow (\sim q)))$

## AS TABELAS VERDADE

A lógica clássica é governada por três princípios (entre outros) que podem ser formulados como segue:

• ***Princípio da Identidade:*** Todo objeto é idêntico a si mesmo.

• ***Princípio da Contradição*****:** Dadas duas proposições contraditórias (uma é negação da outra), uma delas é falsa.

• ***Princípio do Terceiro Excluído:*** Dadas duas proposições contraditórias, uma delas é verdadeira.

Com base nesses princípios as proposições simples são ou verdadeiras ou falsas - sendo mutuamente exclusivos os dois casos; daí dizer que a lógica clássica é bivalente.

Para determinar o valor (verdade ou falsidade) das proposições compostas (moleculares), conhecidos os valores das proposições simples (atômicas) que as compõem usaremos tabelas-verdade :

1.Tabela verdade da "negação" : ~p é verdadeira (falsa) se e somente se p é falsa (verdadeira).

| p | ~p |
|---|---|
| **V** | F |
| **F** | V |

2. Tabela verdade da "conjunção" : a conjunção é verdadeira se e somente os conjunctos são verdadeiros.

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| **V** | V | V |
| **V** | F | F |
| **F** | V | F |
| **F** | F | F |

3. Tabela verdade da "disjunção" : a disjunção é falsa se, e somente, os disjunctos são falsos.

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| **V** | V | V |
| **V** | F | V |
| **F** | V | V |
| **F** | F | F |

4. Tabela verdade da "implicação": a implicação é falsa se, e somente se, o antecedente é verdadeiro e o conseqüente é falso.

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| **V** | V | V |
| **V** | F | F |
| **F** | V | V |
| **F** | F | V |

5. Tabela verdade da "bi-implicação": a bi-implicação é verdadeira se, e somente se seus componentes são ou ambos verdadeiros ou ambos falsos

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| **V** | V | V |
| **V** | F | F |
| **F** | V | F |
| **F** | F | V |

***Exemplo***: Construir a tabela verdade da fórmula : $((p \vee q) \rightarrow \sim p) \rightarrow (q \wedge p)$

| p | q | $((p \vee q) \rightarrow \sim p) \rightarrow (q \wedge p)$ |
|---|---|---|
| **V** | V | V F F **V** V |
| **V** | F | V F F **V** F |
| **F** | V | V V V **F** F |
| **F** | F | F V V **F** F |

•NÚMERO DE LINHAS DE UMA TABELA-VERDADE: Cada proposição simples (atômica) tem dois valores V ou F, que se excluem. Para **n** atômicas distintas, há tantas possibilidades quantos são os arranjos com repetição de 2 (V e F) elementos **n** a **n**. Segue-se que o número de linhas da tabela verdade é $2^n$. Assim, para duas proposições são $2^2 = 4$ linhas; para 3 proposições são $2^3 = 8$; etc.

***Exemplo***: a tabela - verdade da fórmula $((p \wedge q) \rightarrow r)$ terá 8 linhas como segue :

| p | q | r | $((p \wedge q) \rightarrow r)$ | |
|---|---|---|---|---|
| **V** | V | V | V | **V** |
| **V** | V | F | V | **F** |
| **V** | F | V | F | **V** |
| **V** | F | F | F | **V** |
| **F** | V | V | F | **V** |
| **F** | V | F | F | **V** |
| **F** | F | V | F | **V** |
| **F** | F | F | F | **V** |

**NOTA:** "OU EXCLUSIVO" É importante observar que "ou" pode ter dois sentidos na linguagem habitual: **inclusivo** (disjunção) $\vee$ ("vel") e **exclusivo** $\underline{\vee}$ ( "aut") onde $p \underline{\vee} q$ significa $((p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q))$.

| p | q | $((p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q))$ |
|---|---|---|
| **V** | V | V **F** F V |
| **V** | F | V **V** V F |
| **F** | V | V **V** V F |
| **F** | F | F **F** V F |

## CÁLCULO PROPOSICIONAL E A ÁLGEBRA DOS CONJUNTOS

O Cálculo Proposicional e a Álgebra dos Conjuntos possuem estruturas semelhantes.
Toda fórmula do Cálculo Proposicional determina uma operação correspondente entre conjuntos :

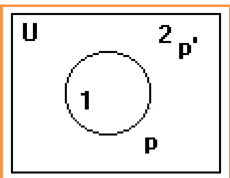
- a negação ($\sim$ ) corresponde à complementação ( ’ ),
- a conjunção ($\wedge$ ) corresponde à intersecção ($\cap$ ) ,
- a disjunção ($\vee$ ) corresponde à união ($\cup$ ).

As variáveis proposicionais podem servir como variáveis simbolizando conjuntos na nova expressão.

***Exemplo***: (( **p** $\vee$ **q)** $\wedge$ **~ p)**corresponde a **(( p** $\cup$ **q )** $\cap$ **p’)**

Podemos expressar, as operações entre conjuntos através dos ***DIAGRAMAS DE EULER-VENN*** (John Venn 1834-1923) que são úteis na verificação de propriedades de operações entre conjuntos, mas não devem ser considerados instrumentos de prova matemática rigorosa. Verifique seu conhecimento com estas operações considerando 2 conjuntos ou 3 conjuntos.

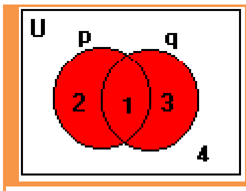
**1.COMPLEMENTAÇÃO** : **p’**que corresponde à **NEGAÇÃO :~p**




| | p | ~ p |
|---|---|---|
| **1** | V | F |
| **2** | F | V |

onde as linhas (1) e (2) da tabela correspondem às regiões (1) e (2) do diagrama respectivamente.

**2.UNIÃO** : **p** $\cup$ **q** que corresponde à **DISJUNÇÃO: p** $\vee$**q**
**p** $\cup$ **q**

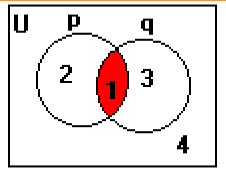



| | p | q | p $\vee$ q |
|---|---|---|---|
| **1** | V | V | V |
| **2** | V | F | V |
| **3** | F | V | V |
| **4** | F | F | F |

as linhas (1), (2), (3) e (4) da tabela correspondem às regiões (1), (2), (3) e (4) do diagrama respectivamente.
A **região hachurada** no diagrama corresponde às linhas da tabela onde a fórmula **p** $\vee$ **q** assume valor **V**.

**3. INTERSECÇÃO** : **p ∩ q** que corresponde à **CONJUNÇÃO: p ∧ q**

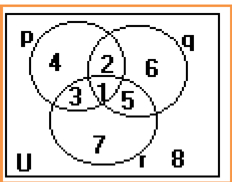
**p ∩ q**




| | p | q | p ∧q |
|---|---|---|---|
| **1** | V | V | V |
| **2** | V | F | F |
| **3** | F | V | F |
| **4** | F | F | F |

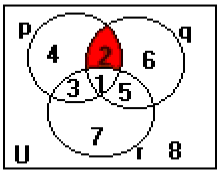
A **região hachurada** do diagrama corresponde à linha (1) da tabela, onde a fórmula **p∧q** assume valor **V**.

A figura abaixo forma um Diagrama de Venn apropriado para **três conjuntos**. Temos **8 regiões** que correspondem, respectivamente, às 8 linhas da tabela-verdade ao lado do diagrama :




| | p | q | r |
|---|---|---|---|
| **1** | V | V | V |
| **2** | V | V | F |
| **3** | V | F | V |
| **4** | V | F | F |
| **5** | F | V | V |
| **6** | F | V | F |
| **7** | F | F | V |
| **8** | F | F | F |

***Exemplo***: O diagrama de Venn abaixo corresponde à fórmula ~((p ∧ q) → r) e à expressão **(p ∩ q) ∩ r'**. O valor **V** da fórmula (última coluna) corresponde à região **2** do diagrama de Venn.




| p | q | r | ~((p ∧ q) → r ) |
|---|---|---|---|
| **V** | V | V | **F** V V V |
| **V** | V | F | **V** V F F |
| **V** | F | V | **F** F V V |
| **V** | F | F | **F** F V F |
| **F** | V | V | **F** F V V |
| **F** | V | F | **F** F V F |
| **F** | F | V | **F** F V V |
| **F** | F | F | **F** F V F |

**Questões:**

**01.** Sendo p a proposição Paulo é paulista e q a proposição Ronaldo é carioca, traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:

a) ~q
b) p ^ q
c) p v q
d) p " q
e) p " (~q)

**02.** Sendo p a proposição Roberto fala inglês e q a proposição Ricardo fala italiano traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Roberto fala inglês e Ricardo fala italiano.
b) Ou Roberto não fala inglês ou Ricardo fala italiano.
c) Se Ricardo fala italiano então Roberto fala inglês.
d) Roberto não fala inglês e Ricardo não fala italiano.

**03.** (UFB) Se p é uma proposição verdadeira, então:

a) p ^ q é verdadeira, qualquer que seja q;
b) p v q é verdadeira, qualquer que seja q;
c) p ^ q é verdadeira só se q for falsa;
d) p =>q é falsa, qualquer que seja q
e) n.d.a.

**04.** (MACK) Duas grandezas x e y são tais que "se x = 3 então y = 7". Pode-se concluir que:

a) se x 3 antão y 7
b) se y = 7 então x = 3
c) se y 7 então x 3
d) se x = 5 então y = 5
e) se x = 7 então y = 3

**05.** (ABC) Assinale a proposição composta logicamente verdadeira:

a) (2 = 3) => (2 . 3 = 5)
b) (2 = 2) => (2 . 3 = 5)
c) (2 = 3) e (2 . 3 = 5)
d) (2 = 3) ou (2 . 3 = 5)
e) (2 = 3) e (~ ( 2= 2))

**06.** (UGF) A negação de x > -2 é:

a) x > 2
b) x #-2

c) x < -2
d) x < 2
e) x #2

**07.** (ABC) A negação de todos os gatos são pardos é:

a) nenhum gato é pardo;
b) existe gato pardo;
c) existe gato não pardo;
d) existe um e um só gato pardo;
e) nenhum gato não é pardo.

**08.** (ABC) Se A negação de o gato mia e o rato chia é:

a) o gato não mia e o rato não chia;
b) o gato mia ou o rato chia;
c) o gato não mia ou o rato não chia;
d) o gato e o rato não chiam nem miam;
e) o gato chia e o rato mia.

**09.** Duas grandezas A e B são tais que "se A = 2 então B = 5". Pode-se concluir que:

a) se A 2 antão B 5
b) se A = 5 então B = 2
c) se B 5 então A 2
d) se A = 2 então B = 2
e) se A = 5 então B 2

**10.** (VUNESP) Um jantar reúne 13 pessoas de uma mesma família. Das afirmações a seguir, referentes às pessoas reunidas, a única necessariamente verdadeira é:

a) pelo menos uma delas tem altura superior a 1,90m;
b) pelo menos duas delas são do sexo feminino;
c) pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês;
d) pelo menos uma delas nasceu num dia par;
e) pelo menos uma delas nasceu em janeiro ou fevereiro.

## Resolução:

**01.** a) Paulo não é paulista.
b) Paulo é paulista e Ronaldo é carioca.
c) Paulo é paulista ou Ronaldo é carioca.
d) Se Paulo é paulista então Ronaldo é carioca.
e) Se Paulo é paulista então Ronaldo não é carioca.

**02.** a) p ^ q
b) (~p) v p
c) q " p
d) (~p) ^ (~q)

| | | | |
|---|---|---|---|
| **03.** B | **04.** C | **05.** A | **06.** C |
| **07.** C | **08.** C | **09.** C | **10.** C |