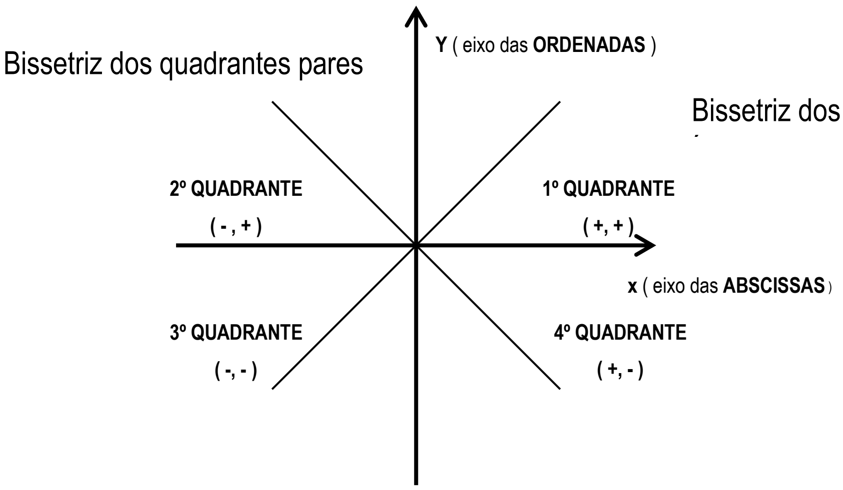
MATEMÁTICA

GEOMETRIA ANALÍTICA

GEOMETRIA ANALÍTICA

Foi com o francês René Descartes , filósofo e matemático que surgiu a geometria analítica.

1. O PLANO CARTESIANO



Os quatro quadrantes são numerados no sentido anti-horário, e os eixos e a intersecção entre eles são denominados, respectivamente, eixo das abscissas (x), eixo das ordenadas (y) e origem (0) do sistema de coordenadas cartesianas.

A reta que divide ao meio os quadrantes ímpares é chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares e a que divide os quadrantes pares é a bissetriz dos quadrantes pares.

Observações:

I. Os pontos pertencentes ao eixo 0x possuem ordenadas nulas.

$$P \in 0x \leftrightarrow P = (x, 0)$$

II. Os pontos pertencentes ao eixo 0y possuem abscissas nulas.

$$P \in 0y \leftrightarrow P = (0, y)$$

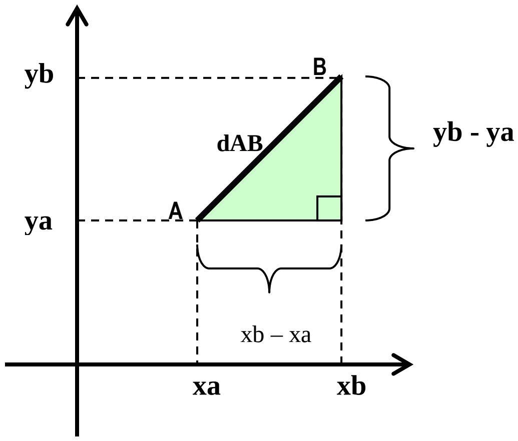
III. Todos os pontos da bissetriz dos quadrantes ímpares possuem abscissas iguais à ordenada e vice-versa.

$$A \in bi \leftrightarrow A = (a, a)$$

IV. Todos os pontos da bissetriz dos quadrantes pares possuem abscissas e ordenadas opostas e vice-versa.

$$B \in bp \leftrightarrow B = (b, -b)$$

02. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS



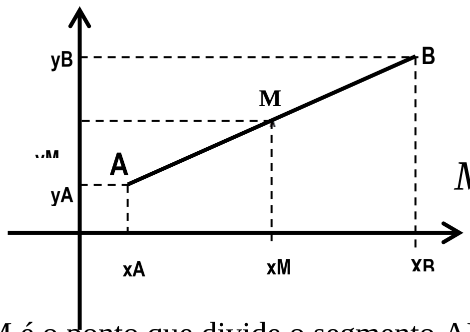
Dados dois pontos distintos do plano cartesiano, chama-se distância entre eles a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidade. Sendo A(xa, ya) e B(xb, yb), aplicando Pitágoras temos:

$$d^2 = (X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2$$

Ex: (UFRGS) A distância entre os pontos A(-2, y) e B(6, 7) é 10. O valor de y é:
a) -1
b) 0
c) 1 ou 13
d) -1 ou 10
e) 2 ou 12

03. PONTO MÉDIO

Sendo A(xa, ya), B(xb, yb) e M(xM, yM) o seu ponto médio, temos:



$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

M é o ponto que divide o segmento AB ao meio.

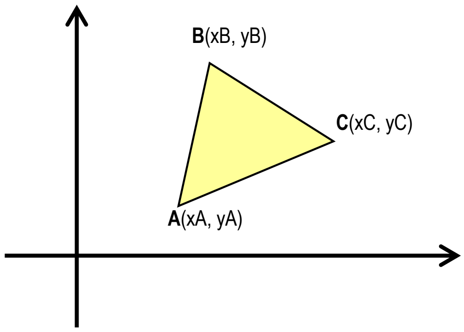
EXERCÍCIOS

01. Sendo A(1, 3) e B(7, 13) as extremidades do segmento AB, seu ponto médio é:
a) (4, 8)
b) (2, 4)
c) (8, 16)
d) (1, 2)
e) (3, 4)

02. Sendo A(-5, 2) uma das extremidades do segmento de reta AB e M(-2, 4) o seu ponto médio, o ponto B vale:
a) (1, 6)
b) (2, 12)
c) (-5, 4)
d) (-2, 2)
e) (0, 1)

04. ÁREA DE UM TRIÂNGULO, QUADRADO...

Consideramos um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ a sua área é dada por:



$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{matrix}\right\| \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{matrix}\right\|$$

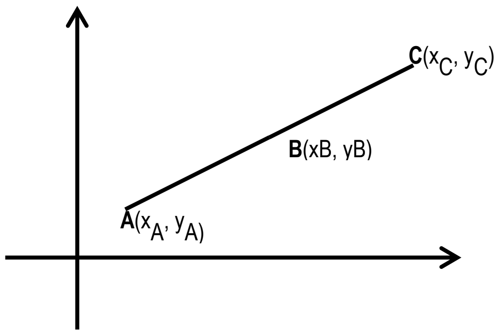
EXERCÍCIOS

03. Calcular a área do triângulo de vértices A(1,3), B(4,1) e C(6,5).
a) 16
b) 4
c) 10
d) 12
e) 8

04. Calcular a área do quadrilátero de vértices A(1,3), B(5,1), C(6,5) e D(3,7).
a) 17
b) 34
c) 10
d) 6
e) 8

05. CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Sendo $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ três pontos distintos dois a dois, são colineares ou estão alinhados, se e somente se:



$$\left\|\begin{matrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{matrix}\right\| = 0 \quad \text{ou} \quad \left\|\begin{matrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{matrix}\right\| = 0$$

EXERCÍCIOS

06. O valor de x para que os pontos A(x,0), B(3,1) e C(-4,2) sejam colineares é:

a) 0
b) 10
c) 3
d) 12
e) -4

07. Os pontos (1,3), (2,7) e (4,k) do plano cartesiano estão alinhados se, e somente se:

a) k = 11
b) k = 12
c) k = 13
d) k = 14
e) k = 15

06. EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

É toda equação do tipo y = ax + b, onde “a” é chamado de coeficiente angular (ou declividade) e “b” é chamado de coeficiente linear.

Exemplos:

$$y = 2x - 3 \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \qquad 2x + y - 1 = 0 \begin{cases} a = -\dfrac{2}{3} \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

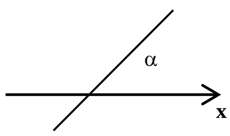
$$y = 5x + 1 \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases} \qquad 5x + 4y = 0 \begin{cases} a = -\dfrac{5}{4} \\ b = 0 \end{cases}$$

07. COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA

O coeficiente angular de uma reta é um número real “a” que representa a sua inclinação (α). Por definição, temos que:

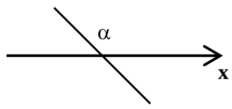
$$\boxed{a = \text{tg}\ \alpha}$$

Reta inclinada para a direita



$\boxed{\alpha \text{ é agudo} \Leftrightarrow a > 0}$

Reta inclinada para esquerda



$\boxed{\alpha \text{ é obtuso} \Leftrightarrow a < 0}$

Para determinarmos o valor do coeficiente angular (a) faremos:

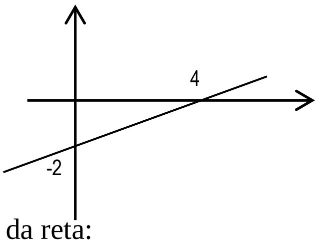
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad \text{ou} \qquad a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Observação: "b" é a ordenada do ponto onde a reta intersecciona o eixo y.

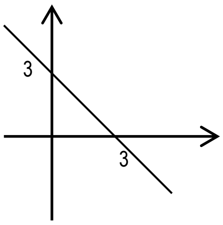
EXERCÍCIOS

08. Os coeficientes angular e linear da reta 3y - 2x + 12 = 0 são respectivamente:
   a) 2/3 e 4
   b) 3/2 e 12
   c) -2/3 e -12
   d) 2/3 e -4
   e) -3/2 e 4

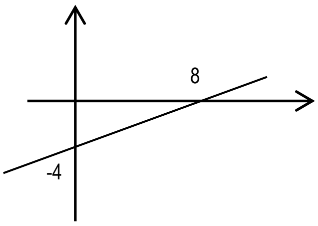
09. A reta da figura abaixo tem como coeficiente angular e linear, respectivamente:
   a) 1/2 e -2
   b) 2 e -1/2
   c) -1/2 e -2
   d) -2 e -1/2
   e) 1/2 e -1/2



10. Determine a equação reduzida da reta:
   a) y = x + 3
   b) y = -x + 3
   c) y = 2x+6
   d) y = x – 3
   e) y = - 3x + 2



11. Determine a equação geral da reta
   a) x – 2y - 8 = 0
   b) 2x + y – 2 = 0
   c) 4x – 2y – 4 = 0
   d) x – y + 2 = 0
   e) x – y + 4 = 0



12. Determine a equação da reta que passa pelos pontos A(-3, 2) e B(5, -4)
   a) 4x + 3y + 1= 0
   b) 3x + 4y + 1= 0
   c) x + y + 3 = 0
   d) x + y – 4 = 0
   e) x – y – 1 = 0

08.PONTO DE INTERSECÇÃO ENTRE DUAS RETAS

Para determinarmos o ponto de intersecção entre duas retas basta resolvermos o sistema formado pelas suas equações.

EXERCÍCIOS

13. Obtenha o ponto de intersecção entre as retas r: 2x + 5y – 9 = 0 e s: y = - 2x – 3.
    a) (-3, 3)
    b) (2, -2)
    c) (5, 22)
    d) (1, 2)
    e) (3, 4)

14. Obtenha o ponto de intersecção entre as retas r: y = 2x - 6 e s: y = 3x + 2.
    a) (-8, -22)
    b) (1, 2)
    c) (4, -10)
    d) (5, 6)
    e) (-4, 12)

09. EQUAÇÃO DO FEIXE DE RETAS

As retas não-verticais que passam por $P(x_0, y_0)$ são dadas pela equação:

EXERCÍCIOS

15. Obtenha a equação da reta que por P e tem declividade a.

    a) P(2, 3); a = 2

    b) P(-2, 1); a = -2

    c) P(4, 0); a = -1/2

16. Escreva a equação fundamental da reta que passa pelo ponto P e tem inclinação α.

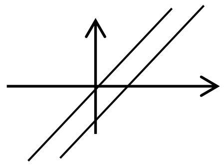
    a) P(2, 8) e $\alpha = 45^\circ$

    b) P(-4, 6) e $\alpha = 30^\circ$

    c) P(3, -1) e $\alpha = 120^\circ$

10. POSIÇÃO RELATIVA ENTRE RETAS

RETAS PARALELAS



$$\left.\begin{matrix} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \text{PARALELAS DISTINTAS}$$

EXERCÍCIOS

17. Determine o valor de “m” para que as retas 2x + 3y - 1 = 0 e mx + 4y – 3 = 0 sejam paralelas.
   a) 1
   b) 2
   c) - 3
   d) – 6/3
   e) 8/3

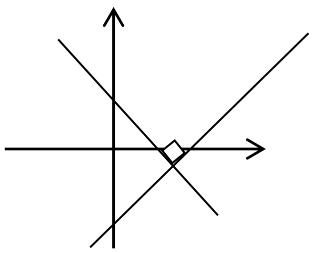
18. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto P(3, -3) e é paralela à reta 2x – 3y -6 = 0.
   a) 2x – y + 9 = 0
   b) 2x – 3y – 15 = 0
   c) 3x + 2y – 15 = 0
   d) x – 2y + 9 = 0
   e) 3x – 2y + 15 = 0

19. Determine a equação da reta que passa pelo ponto A(3, 2) e é paralela à reta 4x – y + 1 = 0.
   a) y = 2x – 3
   b) y = 4x – 10
   c) y = - x + 15
   d) y = x + 5
   e) y = - 4x +5

RETAS PERPENDICULARES

Dadas duas retas r e s não-verticais dadas pelas equações:
(r) $y = a_1x + b_1$
(s) $y = a_2x + b_2$

Para essas retas, temos a seguinte possibilidade:



$$a_1 = -\frac{1}{a_2} \Leftrightarrow \text{PERPENDICULARES}$$

EXERCÍCIOS

20. Determine o valor de “k” para que as retas 3x - 5y + 10 = 0 e kx + 3y – 21 = 0 sejam perpendiculares.
   a) 1
   b) 6
   c) -10
   d) 15
   e) 5

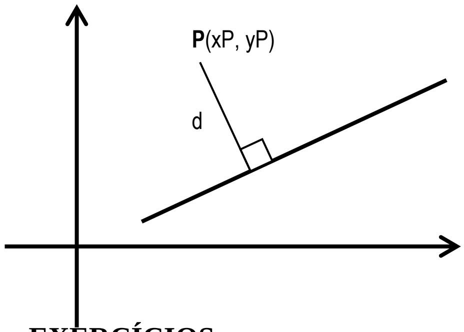
21. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto P(1, 5) e é perpendicular à reta de equação x + 3y - 12 = 0.

a) $y = -2x - 1$
b) $y = x + 4$
c) $y = 3x + 2$
d) $y = -x + 5$
e) $y = -x - 12$

22. Obtenha a equação da **mediatriz** do segmento de reta AB, sendo A(3, 2) e B(7, 4).
a) $y = -2x + 13$
b) $y = 2x - 13$
c) $y = x + 1$
d) $y = 13x + 2$
e) $y = x - 4$

11. DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

A distância entre o ponto e a reta (r) $Ax + By + C = 0$ é dada pela seguinte expressão:



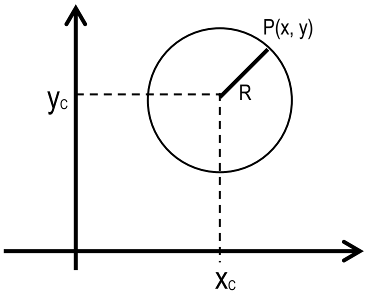
$$d_{Pr} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

EXERCÍCIOS

23. Calcule a distância do ponto P(2, 6) à reta $3x - 4y - 2 = 0$.
a) 32
b) 10
c) 8
d) 4
e) 2

12. CIRCUNFERÊNCIA

EQUAÇÃO REDUZIDA
Consideremos uma circunferência de centro C(xc, yc) e raio R, teremos:



$$R^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2$$

EXERCÍCIOS

24. Determine a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R.
a)
$$\begin{cases} C(3,5) \\ R = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} C(0,0) \\ R = \sqrt{7} \end{cases}$$

25. Escreva a equação reduzida da circunferência de raio 12 e concêntrica com a circunferência $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 64$. Qual é a área da coroa circular determinada por essas duas circunferências?

26. Determine a equação da circunferência de centro em (3, 5) e raio igual a 4.
   a) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 = 0$
   b) $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 1 = 0$
   c) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$
   d) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 4 = 0$
   e) $x^2 + y^2 + -6x - 10y - 50 = 0$

EQUAÇÃO GERAL

$$\mathbf{Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Condições para ser circunferência:

1. $A = B \neq O$ (coef. de x^2 = coef. y^2)

2. C = 0 (não pode aparecer xy)

3. R > 0 (O raio de ver ser um número real)

Coordenadas do centro:

$$C\ (-D/2\ ;\ -E/2)$$

Raio:

$$R^2 = X_C{}^2 + Y_C{}^2 - F$$

EXERCÍCIOS

27. Determine a equação geral da circunferência de centro C(3, 5) e raio R igual 4.
   a) $x^2 + y^2 + 10x + 6y - 18 = 0$
   b) $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 1 = 0$
   c) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 18 = 0$
   d) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 4 = 0$
   e) $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 27 = 0$

28. Determine o centro e o raio da circunferência $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 20 = 0$, respectivamente:
   a) (-2,5) e 7
   b) (5,2) e 5
   c) (2,2) e 2
   d) (3,4) e 1
   e) (5,-2) e 7

29. Calcule a área de um quadrado inscrita na circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$
   a) 2u.a.
   b) 4u.a.
   c) 8u.a.
   d) 16u.a.
   e) 32u.a.

30. Determine o valor de k para que a equação $x^2 + y^2 + 4x - 2y + k = 0$ represente uma circunferência:

a) k > 5
b) k < 5
c) k > 10
d) k < 15
e) k = 20

30.Escreva a equação da circunferência de centro C(3,5) e tangente a reta (r) 5x + 12y – 10 = 0

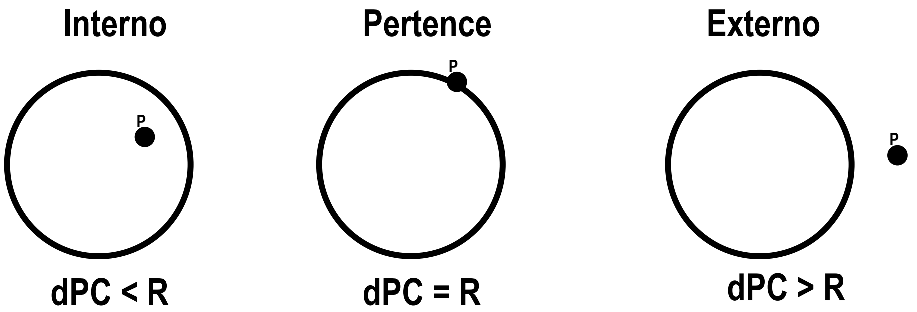
a) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 12x + 38y - 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 8x + 15y + 1 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 2x - 11y - 8 = 0$

13. POSIÇÕES RELATIVAS

PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

Para uma circunferência de centro C(Xc,Yc) e raio R e um ponto P qualquer, compararemos o seguimento de reta PC com R.

Há três casos possíveis:
1º) Se dPC = R, então P pertence à circunferência.
2º) Se dPC > R, então P é externo à circunferência.
3º) Se dPC < R, então P é interno à circunferência.



EXERCÍCIOS

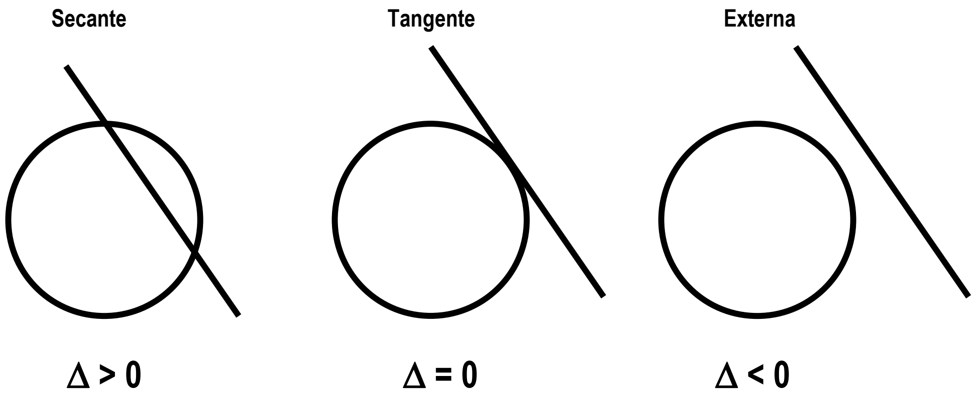
Ex:. Determine a posição do ponto P(53) em relação a circunferência $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$

a) externo
b) interno
c) pertence
d) centro
e) n.d.a.

RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Se substituirmos o valor de uma das variáveis (x ou y) da reta na equação da circunferência, obteremos uma equação do 2º grau (na outra variável).

Calculando o discriminante (Δ) da equação obtida, poderemos ter:
1º) Se $\Delta > 0$, então a reta será secante à circunferência (2 pontos de interseção).
2º) Se $\Delta = 0$, então a reta será tangente à circunferência (1 ponto de interseção).
3º) Se $\Delta < 0$, então a reta é externa à circunferência (não existe ponto de interseção).



EXERCÍCIOS

31. Determine a posição relativa da reta x – y + 1 = 0 em relação ao círculo

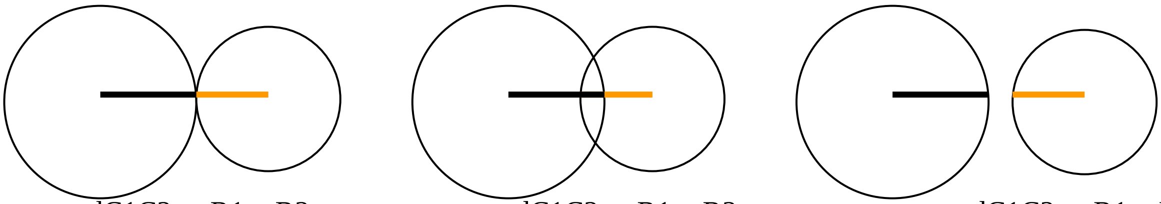
$$x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$$

a) secante
b) tangente
c) externa
d) n.d.a.

DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Dadas duas circunferências, uma de centro C1 e raio R1 e a outra de centro C2 e raio R2, compararemos o seguimento de reta C1C2 e R1 + R2.
Há três possibilidades:
1º) Se dC1C2 = R1 + R2, então as circunferências são tangentes (1 ponto de interseção).
2º) Se dC1C2 > R1 + R2, então as circunferências são externas (não existe ponto de interseção).
3º) Se dC1C2 < R1 + R2, então as circunferências são secantes (2 pontos de interseção).

Tangentes **Secante** **Externas**



dC1C2 = R1 + R2 dC1C2 < R1 + R2, dC1C2 > R1 + R2,

EXERCÍCIO

Qual a posição relativa entre as circunferências

(λ) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ e (δ) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$.

e) tangente
f) secante
g) externas
h) coincidentes
i) n.d.a.

Respostas:
1-a; 2-a; 3-e; 4-a; 5-b; 6-e; 7-d; 8-a; 9-b; 10-a; 11-b; 12-a; 13-a;
14- a) y=2x-1 b) y=-2x-3 c) y=-x/2 + 2 ; 15- a) y=x+6 b) y= $\sqrt{3}$ **x/3+6+4** $\sqrt{3}$ **/3**
c) y=- $\sqrt{3}$ **x+3** $\sqrt{3}$ **-1; 16-e; 17-b; 18-b; 19-e 20-c; 21-a; 22-d; 25-e;**
26-c; 27-e; 28-e; 29-b; 30-a; 31-b

Exercícios e Testes de Vestibular :

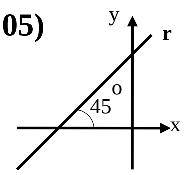
01) Calcule a distância entre os pontos A(-3 , 1) e B(3 , 9).

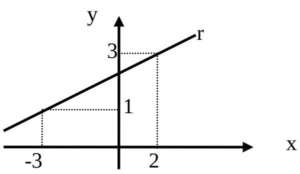
02) Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento de extremos A(-5 , 0) e B(1 , 4).

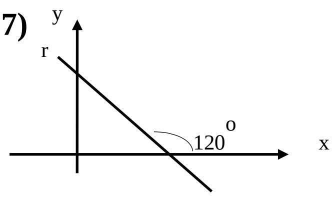
03) Calcule a área do triângulo de vértices A(-6 , 3) ; B(2 , 9) ; C(2 , 3).

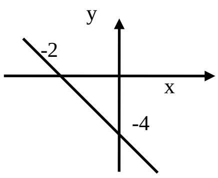
04) (PUC) -A área do polígono ABCD, onde A(2, 2), B(6, 6), C(4, 8) e D(0, 6) são seus vértices, é

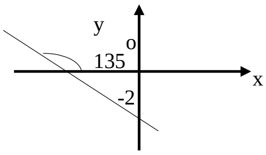
Calcular o coeficiente angular das retas abaixo :

05)


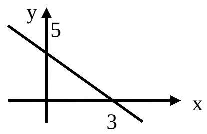
06)


07)


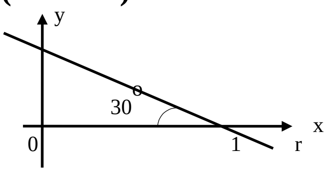
08)


09) Determine o coeficiente angular e linear da reta :


10) Encontre a equação reduzida e geral da reta :



11) (UFRGS) - Considere a figura abaixo. Uma equação cartesiana da reta r é

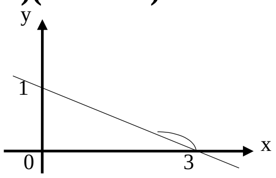


12) Encontre o ponto de interseção das retas : 3x - y - 8 = 0 e x + y - 4 = 0.

13) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto (0 , 4) e é perpendicular a reta de e-quação y = -x/2 + 10.

14) Qual é a equação da reta que passa pelo ponto P(-3 , 2) e é paralela a reta de equação 3x - y + 7 = 0.

15)(UFRGS) Considere o gráfico de y = f(x) abaixo :



Então o gráfico de y = x . f(x) é:

16) Qual é a distância entre o ponto P(2 , 3) e a reta de equação 4x + 3y - 12 = 0.

17) Calcule a distância entre a origem e a reta 6x + 8y - 24 = 0.

18)(PUC)- A área da região limitada pelos gráficos de $x^2 + y^2 = 16$ e $x^2 + y^2 =1$ é

a) 15π u.a.
b) 15 u.a.
c) 255π u.a.
d) 255 u.a.
e) 3 u.a.

19) Determine a equação da circunferência de centro C(5 , 2) e que é tangente ao eixo das abscissas.

20) Determine a equação da circunferência de centro (3 , 4) e que passa pela origem.

21) Qual é a equação da circunferência de centro na origem e que é tangente a reta de equação $x + 2 = 0$.

22) Determine as coordenadas do centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$.

23) Qual é o diâmetro da circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 9 = 0$.

24) Encontre a equação da circunferência de centro C(1 , 2) e que passa pelo ponto P(4 , 6)

Verifique se as equações a seguir determinam uma circunferência :

25) $3x^2 + 3y^2 + 12x + 6y - 20 = 0$

26) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 40 = 0$

27) (PUCRS) Um ponto situado em um plano onde está um referencial cartesiano se desloca sobre uma reta que passa pela origem e pelo centro da circunferência de equação $x^2 + (y – 1)^2 = 1$.
A equação dessa reta é
A) $y = x +1$
B) $y = x$
C) $y = 1$
D) $x = 1$
E) $x = 0$

28) (UFRGS-2010) Os pontos de interseção do círculo de equação $(x – 4)^2 + (y – 3)^2 = 25$ com os eixos coordenados são vértices de um triângulo. A área desse triângulo é

(A) 22. **(B) 24.** (C) 25. (D) 26. (E) 28.

Respostas : 01) 10 02) (-2 , 2) 03) 24 04) 18 05) 1 06) 2/5 07) - $\sqrt{3}$
08) -2 09) a = -1; b = -2 10) y = -5x/3 + 5 ; 5x + 3y - 15 = 0
11) y = ($\sqrt{3}$ / 3) - ($\sqrt{3}$ x / 3) 12) (3 , 1) 13) y = 2x + 4 14) y=3x+11 16)1
17) 2,4 18)a 19) $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ 20) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ 21) $x^2 + y^2 - 4 = 0$
22) C(3 , -1) ; R = 2 23) 2 $\sqrt{13}$ 24) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ 25) sim 26) não 27)e 28)b