MATEMÁTICA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

PERMUTAÇÃO é o tipo de agrupamento ordenado em que cada grupo entram todos os elementos. Os grupos diferem pela **ORDEM** $P_n = n!$

ARRANJO : é o tipo de agrupamento em que um grupo é diferente do outro pela **ORDEM** ou pela **NATUREZA** dos elementos.

$$A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!}$$

DICA : **Algarismos significativos {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }**
Algarismos decimais {0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9}

COMBINAÇÃO é o tipo de agrupamento em que um grupo é diferente de outro apenas pela **NATUREZA** dos elementos.

EXEMPLO : Quantas comissões de 3 pessoas podemos formar com 10 alunos de uma classe ?

$$C_n^P = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Introdução

Foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos de contagem. Esses estudos foram iniciados já no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).
A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indireta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

Fatorial

Seja n um número inteiro não negativo. Definimos o fatorial de n (indicado pelo símbolo n!) como sendo:

$n! = n.(n-1).(n-2). \dots .4.3.2.1$ para n ³ 2.

Para n = 0 , teremos : 0! = 1.

Para n = 1 , teremos : 1! = 1

Exemplos:

a) 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720

b) 4! = 4.3.2.1 = 24

c) observe que 6! = 6.5.4!

d) 10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1

e) 10! = 10.9.8.7.6.5!

f) 10! = 10.9.8!

Princípio fundamental da contagem - PFC

Se determinado acontecimento ocorre em n etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, **então** o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por:

$T = k_1 . k_2 . k_3 . ... . k_n$

Exemplo:

O DETRAN decidiu que as placas dos veículos do Brasil serão codificadas usando-se 3 letras do alfabeto e 4 algarismos. Qual o número máximo de veículos que poderá ser licenciado?

Solução:

Usando o raciocínio anterior, imaginemos uma placa genérica do tipo PWR-USTZ.
Como o alfabeto possui 26 letras e nosso sistema numérico possui 10 algarismos (de 0 a 9), podemos concluir que: para a 1ª posição, temos 26 alternativas, e como pode haver repetição, para a 2ª, e 3ª também teremos 26 alternativas. Com relação aos algarismos, concluímos facilmente que temos 10 alternativas para cada um dos 4 lugares. Podemos então afirmar que o número total de veículos que podem ser licenciados será igual a: 26.26.26.10.10.10.10 que resulta em 175.760.000. Observe que se no país existissem 175.760.001 veículos, o sistema de códigos de emplacamento teria que ser modificado, já que não existiriam números suficientes para codificar todos os veículos. Perceberam?

Permutações simples

- Permutações simples de n elementos distintos são os agrupamentos formados com todos os n elementos e que diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos.

Exemplo: com os elementos A,B,C são possíveis as seguintes permutações: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA.

O número total de permutações simples de n elementos distintos é dado por n!, isto é

$P_n = n!$ onde $n! = n(n-1)(n-2)\ldots .1$.

Exemplos:

a) $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

b) Calcule o número de formas distintas de 5 pessoas ocuparem os lugares de um banco retangular de cinco lugares.

$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

- Denomina-se ANAGRAMA o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na linguagem comum.

Exemplo:

Os possíveis anagramas da palavra REI são:

REI, RIE, ERI, EIR, IRE e IER.

Permutações com elementos repetidos

Se entre os n elementos de um conjunto, existem a elementos repetidos, b elementos repetidos, c elementos repetidos e assim sucessivamente , o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$P_n^{(a,b,c,\ldots)} = \frac{n!}{a!b!c!\ldots}$$

Exemplo:

Determine o número de anagramas da palavra MATEMÁTICA.(não considere o acento)

Solução:

Temos 10 elementos, com repetição. Observe que a letra M está repetida duas vezes, a letra A três , a letra T, duas vezes. Na fórmula anterior, teremos: n=10, a=2, b=3 e c=2. Sendo k o número procurado, podemos escrever:

k= 10! / (2!.3!.2!) = 151200

Resposta: 151200 anagramas.

Arranjos simples

Dado um conjunto com n elementos , chama-se arranjo simples de taxa k , a todo agrupamento de k elementos distintos dispostos numa certa ordem. Dois arranjos diferem entre si, pela ordem de colocação dos elementos. Assim, no conjunto E = {a,b,c}, teremos:

a) arranjos de taxa 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb.
b) arranjos de taxa 3: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Representando o número total de arranjos de n elementos tomados k a k (taxa k) por $A_{n,k}$, teremos a seguinte fórmula:

$$\boxed{A_n^K = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

bs : é fácil perceber que $A_{n,n} = n! = P_n$. (Verifique)

Exemplo:

Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0,1,2,...,9. O segredo do cofre é marcado por uma seqüência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer(no máximo) para conseguir abri-lo?

Solução:

As seqüências serão do tipo xyz. Para a primeira posição teremos 10 alternativas, para a segunda, 9 e para a terceira, 8. Podemos aplicar a fórmula de arranjos, mas pelo princípio fundamental de contagem, chegaremos ao mesmo resultado:
10.9.8 = 720.
Observe que 720 = $A_{10,3}$

Combinações simples

Denominamos combinações simples de n elementos distintos tomados k a k (taxa k) aos subconjuntos formados por k elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. Observe que duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, não importando a ordem em que os elementos são colocados.

Exemplo:

No conjunto E= {a,b.c,d} podemos considerar:
a) combinações de taxa 2: ab, ac, ad,bc,bd, cd.
b) combinações de taxa 3: abc, abd,acd,bcd.
c) combinações de taxa 4: abcd.

Representando por $C_{n,k}$ o número total de combinações de n elementos tomados k a k (taxa k) , temos a seguinte fórmula:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Nota: o número acima é também conhecido como Número binomial e indicado por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo:

Uma prova consta de 15 questões das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Solução:

Observe que a ordem das questões não muda o teste. Logo, podemos concluir que trata-se de um problema de combinação de 15 elementos com taxa 10.

Aplicando simplesmente a fórmula chegaremos a:
$C_{15,10}$ = 15! / [(15-10)! . 10!] = 15! / (5! . 10!) = 15.14.13.12.11.10! / 5.4.3.2.1.10! = 3003

Exercício resolvido:

Um salão tem 6 portas. De quantos modos distintos esse salão pode estar aberto?

Solução:

Para a primeira porta temos duas opções: aberta ou fechada
Para a segunda porta temos também, duas opções, e assim sucessivamente.
Para as seis portas, teremos então, pelo Princípio Fundamental da Contagem - PFC:
N = 2.2.2.2.2.2 = 64
Lembrando que uma dessas opções corresponde a todas as duas portas fechadas, teremos então que o número procurado é igual a 64 - 1 = 63.

Resposta: o salão pode estar aberto de 63 modos possíveis.

Testes de vestibular :

01) Quantos números de 4 algarismos distintos teremos com algarismos decimais ?
a) 2234
b) 4536
c) 5000
d) 4000
e) 6436

02) Quantos números tem três algarismos distintos com somente os algarismos ímpares ?
a) 20
b) 30
c) 40
d) 50
e) 60

03) Quantos números pares de 4 algarismos distintos existem com os algarismos significa - tivos ?
a) 2144
b) 1344
c) 2280
d) 4538
e) 4500

04) Quantos números entre 400 e 900 há que não tem algarismos repetidos e são escritos com os algarismos 0 , 1 , 2 , 4 , 6 , 7 , 9 ?
a) 90
b) 80
c) 70
d) 50
e) 30

05) Quantos são os números compreendidos entre 2000 e 3000 formados por algarismos distintos escolhidos entre 1 e 9 ?
a) 640
b) 430
c) 336
d) 429
e) 315

06) Considerando todos os números de 6 algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 9 : quantos são pares e quantos são ímpares ?

07) Com algarismos significativos quantos números de 3 algarismos distintos são divisíveis por 5 ?
a) 15
b) 25
c) 34
d) 46
e) 56

08) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos deci - mais sem os repetir de modo que : a) comecem por 1;b) comecem por 2 e terminem por 5.

09) Com 25 letras e 10 algarismos quantas placas de motos de 2 letras e 3 algarismos po - demos formar : a) podendo repetir os símbolos ; b) não podendo repetir os símbolos.

10) O número de anagramas da palavra "PUCRS" é ?
a) 70
b) 80
c) 100
d) 120
e) 140

11) Quantos anagramas tem a palavra "PUCRS" que começam por "p" e terminam por "s".
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

12) De quantas maneiras 5 pessoas podem ocupar os lugares de um carro sabendo que :
a) todos sabem dirigir ;

b) apenas um sabe dirigir ;

c) somente dois sabem dirigir.

13) Quantos anagramas tem a palavra matemática ?

14) Numa reunião de 7 rapazes e 6 moças , quantas comissões com 3 rapazes e 4 moças podemos formar ?
a) 425
b) 525
c) 600
d) 650
e) 675

15) Uma urna contém 12 bolas das quais 7 são pretas e 5 brancas.De quantas maneiras podemos tirar 6 bolas da urna das quais duas são brancas ?
a) 150
b) 250
c) 350
d) 450
e) 550

16) Numa sala de 15 alunos tem 6 meninas. Queremos fazer uma comissão de 7 alunos de ambos os sexos , em quantas comissões há no máximo 3 meninas ?

17) Quantas diferentes diagonais tem um hexágono ?
a) 9
b) 12
c) 14
d) 16
e) 19

18) Sobre uma reta marcam-se 5 pontos e sobre outra paralela a primeira marcam-se 8 pontos. Quantos triângulos podem-se traçar unindo-se quaisquer destes pontos ?
a) 180
b) 200
c) 220
d) 240
e) 260

19)(UFRGS-2002)- Um professor organizou uma lista com 4 questões de Geometria e 6 de Álgebra, da qual indicou um conjunto diferente de 7 questões para cada um de seus alunos resolver. O número de alunos que recebeu todas as questões de Geometria para resolver é, no máximo, de
a) 15
b) 20
c) 35
d) 42
e) 120

20) Numa sala há 10 pessoas se cumprimentando. Quantos apertos de mãos foram dados ?
a) 25
b) 35
c) 45
d) 55
e) 65

21) Após uma reunião houve 15 apertos de mãos sabendo que todos se cumprimentaram , qual o número de pessoas ?
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

22) Numa sala há oito moças e dez rapazes , de quantos modos podemos formar comissões de 3 pessoas : a) indistintamente ; b) com uma moça.

23) De um grupo de 5 pessoas , de quantas maneiras distintas podemos convidar 1 ou mais pessoas para jantar ?
a) 29
b) 31
c) 34
d) 36
e) 39

24)(ITA-2004) Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?
A. ( ) 210
B. ( ) 315
C. ( ) 410
D. ( ) 415
E. ( ) 521

25) (PUCRS-2006) De seis alunos sorteados, dois serão escolhidos para representar a escola em um evento acadêmico. O número de comissões que podem ser formadas é
A) 6
B) 12
C) 15
D) 24
E) 30

26)(PUCRS) O atleta brasileiro Vanderlei Cordeiro de Lima foi perturbado por um espectador quando liderava a maratona na última Olimpíada, em Atenas. Mesmo assim, conquistou a medalha de bronze. Supondo que não houvesse o incidente e que a disputa pelos três primeiros lugares fosse feita pelos mesmos três atletas, o número de possibilidades diferentes para o pódio olímpico, além daquela que aconteceu, é
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Respostas : 01) b 02) e 03) b 04) a 05) c 06) 2160 pares e 2880 ímpares 07) e 08) 72;8
09) 625000 ; 432000 10) d 11) c 12) a) 120 ; b) 24 ; c) 48 13) 151200 14) b 15) c
16) $C_{9,6} \cdot C_{6,1} + C_{9,5} \cdot C_{6,2} + C_{9,4} \cdot C_{6,3}$ 17) a 18) c 19) b 20) c 21) a 22) a) 816 ; b) 360
23) b 24)a 25)d