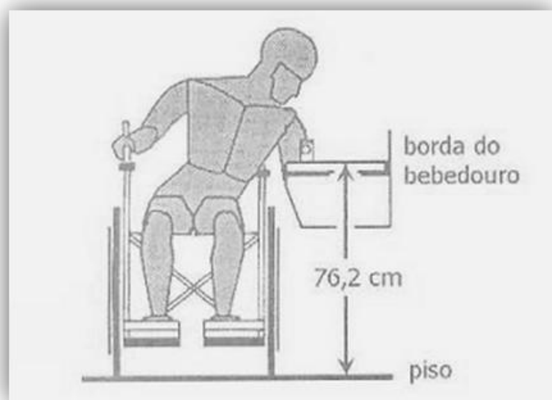
MATEMÁTICA – UFRGS 2010 – RESOLVIDA PELO PROF. REGIS CORTES

> Nesta prova serão utilizados os seguintes símbolos e conceitos com os respectivos significados:
>
> l x l : módulo no número x
> i : unidade imaginária
> sen x : seno de x
> cos x : cosseno de x
> log x : logaritmo de x

26. Alguns especialistas recomendam que, para um acesso confortável aos bebedouros por parte de crianças e usuários de cadeiras de rodas, a borda desses equipamentos esteja a uma altura de 76,2 cm do piso, como indicado na figura abaixo.



Um bebedouro que tenha sido instalado a uma altura de 91,4 cm do piso à borda excedeu a altura recomendada. Dentre os percentuais abaixo, o que mais se aproxima do excesso em relação à altura recomendada é:

(A) 5% (C) 15% (E) 25%
(B) 10% **(D) 20%**

Resolução:

91,4 cm
\- 76,2
15,2 excesso

76,2 ------ 100%
15,2 ------ x

x = 19,947

---

27. A distância que a luz percorre em um ano, chamada ano-luz, é de aproximadamente $38.4^5 . 5^{12}$ quilômetros. A notação científica desse número é

(A) $9{,}5 . 10^{10}$. (B) $0{,}95 . 10^{12}$. **(C) $9{,}5 . 10^{12}$.** (D) $95 . 10^{12}$. (E) $9{,}5 . 10^{14}$.

Resolução:

$38 . 4^5 . 5^{12} = 19 . 2 . 2^{10} . 5^{12} \longrightarrow 19 . 2^{11} . 5^{11} . 5 = 95 . 2^{11} = 9{,}5 . 2^{12}$

---

28. Entre julho de 1994 e julho de 2009, a inflação acumulada pela moeda brasileira, o real, foi de 244,15%. Em 1993, o Brasil teve a maior inflação anual de sua história.

A revista *Veja* de 08/07/2009 publicou uma matéria mostrando que, com uma inflação anual como a de 1993, o poder de compra de 2.000 reais se reduziria, em um ano, ao poder de compra de 77 reais.

Dos valores abaixo, o mais próximo do percentual que a inflação acumulada entre julho de 1994 e julho de 2009 representa em relação à inflação anual de 1993 é

(A) 5% **(B) 10%** (C) 11% (D) 13% (E) 15%

Resolução:

2.000 – 77 = 1923 (Aumento)

77 -------- 100%
1923 -------- x
x = 2497,4 → Taxa inflação 1993

2497,4 ------- 100%
244,15 ------ x
x = 9,78 ≅ 10%

29. A propagação do vírus H1N1, causador da gripe A, foi preocupação mundial em 2009. Quatro meses após a eclosão dos casos da gripe nos Estados Unidos e no México, foi feita uma avaliação dos danos causados pela moléstia, com a utilização de dados de 28 países.

Os quadros abaixo, publicados no jornal *Zero Hora* de 27/08/2009, apresentam os países onde haviam ocorrido mais óbitos até aquela data e as maiores taxas de mortalidade, por 100 mil habitantes.

A moléstia no mundo

País	Óbitos
Brasil	557
EUA	522
Argentina	439
México	179
Austrália	132
Chile	128
Tailândia	119
Peru	80
Canadá	71
Malásia	69

País	Taxa de mortalidade*
Argentina	1,08
Chile	0,75
Costa Rica	0,67
Uruguai	0,65
Austrália	0,61
Paraguai	0,61
Brasil	0,29
Peru	0,27
Malásia	0,24
Canadá	0,21

Com base nessas informações, é correto afirmar que, naquela data,

(A) o Uruguai havia registrado mais de 70 óbitos.
(B) a taxa de mortalidade no Peru era de 27%.
(C) a população da Austrália era maior que a população do Paraguai.
(D) a população da Argentina era superior a 50 milhões de habitantes.
(E) o Brasil era o país mais populoso dentre os citados.

Resolução: Pela relação de taxas de mortalidade Paraguai e Austrália (iguais), tendo a Austrália maior número de óbitos conclui-se que ela tem maior população em relação ao Paraguai.

30. O orçamento do Fundo de Amparo ao Trabalhador para 2010 é de 43 bilhões de reais. Um pesquisador estudou a distribuição desse orçamento e representou o resultado em um gráfico de setores, como na figura abaixo.

Nesse gráfico, a quantia destinada ao abono para quem ganha até dois salários mínimos foi representada por um setor cujo ângulo mede 72°. O pesquisador verificou, então, que o gráfico não estava correto, pois a quantia destinada ao abono encontrada na pesquisa superava em 200 milhões de reais a representada pelo gráfico. Logo, o valor encontrado na pesquisa para aquele abono foi, em bilhões de reais,

(A) 8,8. (C) 9,5. (E) 10,6.
(B) 9,1. (D) 9,8.

Resolução:

43 bi ---- 360°
x ---- 72° **x = 8,6 bi + 200 mil = 8,8 bi**

31. O quadrado do número $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ é

(A) 4. (B) 5. **(C) 6.** (D) 7. (E) 8.

Resolução:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2$

$2 + \cancel{\sqrt{3}} + 2 \,.\, \sqrt{2+\sqrt{3}} \,.\, \sqrt{2-\sqrt{3}} + 2 - \cancel{\sqrt{3}}$

$4 + 2 \,.\, 1 =$ **6**

Prof. Regis Cortês

32. O menor número inteiro positivo n para o qual a parte imaginária do número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,.sen\,\frac{\pi}{8}\right)^n$ é negativa é

(A) 3. (B) 4. (C) 6. (D) 8. **(E) 9.**

Resolução:

Z = e . cos o + sen o

Z = e^n . cos o . n + i sen o . n

= $e^n \,.\, \cos\frac{\pi}{8} \,.\, n + \underbrace{i\, sen\frac{\pi}{8} \,.\, n}_{\text{Parte imag.}}$

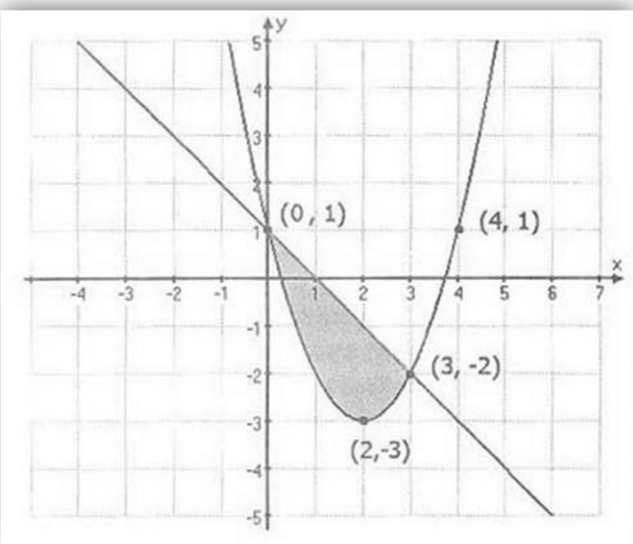
$sen\frac{\pi}{8} < 0$

+	+
-	-

$\frac{n\,.\pi}{8}$ Deve pertencer ao 3° ou 4° quadrante.

n = 0	22,5 . 0 = 0°
n = 1	22,5 . 1 = 22,5°
⋮	
n = 8	22,5 . 8 = 180°
n = 9	22,5 . 9 = 202,5°

33. Considere, na figura abaixo, a região sombreada limitada por uma reta e pelo gráfico de uma função quadrática.



As coordenadas dos pontos (x,y) dessa região verificam as desigualdades

(A) $x^2 - 4x + 1 \leq y \leq 1 - x$.
(B) $x^2 - x + 4 \geq y \geq 1 - x$.
(C) $x^2 - 2x + 1 \leq y \leq 1 - x$.
(D) $x^2 - 4x - 1 \geq y \geq 1 - x$.
(E) $x^2 - 2x + 1 \geq y \geq 1 - x$.

Resolução:
A região hachurada é superior a parábola e inferior a reta.

$ax^2 + bx + c \leq y \leq ax + b$

$x^2 - 4x + 1 \leq y \leq -x + 1$

---

34. Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.

Na Etapa 1, há um único quadrado com lado 10. Na Etapa 2, esse quadrado foi dividido em quatro quadrados congruentes, sendo um deles retirado, como indica a figura. Na Etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior.

- Nessas condições, a área restante na Etapa 6 será de

(A) $100\ (1/4)^5$. (C) $100\ (1/3)^5$. **(E) $100\ (3/4)^5$.**

(B) $100\ (1/3)^6$. (D) $100\ (3/4)^6$.

Resolução: As áreas hachuradas formam uma PG de **q = 3/4**

PG $(100\ .\ 100\ .\ 3/4\ ,\ 100\ .\ (3/4)^2\ ,\ .\ .\ .\ )$

$a_n = a_1 \,.\, q^{\,n-1} \longrightarrow a_6 = 100 \,.\, (3/4)^5$

---

35. Na sequência 1, 3, 7, 15, ..., cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando-se uma unidade ao dobro do termo anterior. O 13° termo dessa sequência é

(A) $2^{11} - 1$. (B) $2^{11} + 1$. (C) $2^{12} - 1$. (D) $2^{12} + 1$. **(E) $2^{13} - 1$.**

Resolução: A sequência é formada por: $2^n - 1$

$2^1 - 1 = 1 \longrightarrow n = 1$

$2^2 - 1 = 3 \longrightarrow n = 2$

$2^3 - 1 = 7 \longrightarrow n = 3$

$2^{13} - 1 = \quad \longrightarrow n = 13$

36. Sabendo-se que os números 1 + log a, 2 + log b, 3 + log c formam uma progressão aritmética de razão r, é correto afirmar que os números a, b, c formam uma

(A) progressão geométrica de razão 10^{r-1}.
(B) progressão geométrica de razão $10^r - 1$.
(C) progressão geométrica de razão log r.
(D) progressão aritmética de razão 1 + log r.
(E) progressão aritmética de razão $10^{1 + \log r}$.

Resolução:

PA $a_2 = \dfrac{a + a_3}{2}$

$2 + \log b = \dfrac{1 + \log a + 3 + \log c}{2}$

$4 + 2 \log b = 4 + \log . c$

$\log b^2 = \log a \,.\, c$

$b^2 = a \,.\, c \longrightarrow$ PG (a, b, c)

q = b/a

PA $r = a_2 - a_1$

$r = 2 + \log b - 1 + \log A$

$r = 1 + \log\ b/a \longrightarrow \log b/a = r - 1$

$\longrightarrow 10^{r-1} = b/a$

---

37. Um número real satisfaz somente uma das seguintes inequações.

I) $\log x \le 0$
II) $2 \log x \le \log(4x)$
III) $2^{x^2+8} \le 2^{6x}$

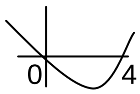
Então, esse número está entre

(A) 0 e 1. **(B) 1 e 2.** (C) 2 e 3. (D) 2 e 4. (E) 3 e 4.

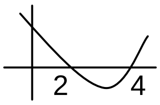
Resolução:

I) $10^0 \geq x \quad 0 \leq x \leq 1$

II) $\cancel{\log} x^2 \leq \cancel{\log} 4x \longrightarrow x^2 - 4x \leq 0$

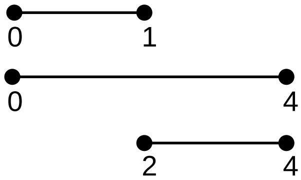


III) $x^2 + 8 \leq 6x$



$x^2 - 6x + 8 \leq 0$

$x' = 2 \qquad y'' = 4$

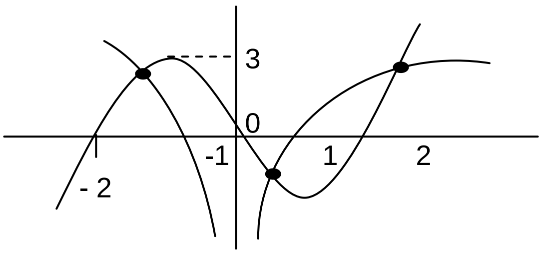


Para satisfazer uma inequação apenas o número deverá pertencer ao intervalo (1, 2)

38. Representando no mesmo sistema de coordenadas os gráficos das funções reais de variável real $f(x) = \log |x|$ e $g(x) = x\,(x^2 - 4)$, verificamos que o número de soluções da equação f(x) = g(x) é

(A) 0. (B) 1. (C) 2. **(D) 3.** (E) 4.

Resolução:



39. Sabendo-se que um polinômio p(x) de grau 2 satisfaz p(1) = - 1, p(2) = - 2 e p(3) = - 1, é correto afirmar que a soma de suas raízes é

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. **(E) 4.**

Resolução: $P(x) = a\,x^2 + bx + c$

$$\begin{array}{l} \text{I)} \\ \text{II)} \\ \text{III)} \end{array} \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = -2 \\ 9a + 3b + c = -1 \end{cases} \begin{array}{l} 2 - 1 \\ \\ 3 - 1 \end{array}$$

$(3 - 1)\ \ 8a + 2b = 0 \longrightarrow \boxed{b = -4a}$

$(2 - 1)\ 3a + b = -1 \longrightarrow \boxed{a = 1}$

$b = -4\ .1$

$\boxed{b = -4}$

$s = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-4)}{1}$

$s = 4$

Prof. Regis Cortês

40. As medidas dos lados de um triângulo são proporcionais a 2, 2 e 1. Os cossenos de seus ângulos internos são, portanto,

(A) $\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}$.

(B) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

(C) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}$.

(D) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

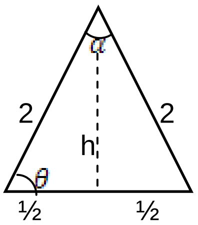
(E) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}$.

Resolução:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 . b . c . \cos \alpha$

$1^2 = 2^2 + 2^2 - 2 . 2 . 2 . \cos \alpha$

$\boxed{\cos \alpha = 7/8}$



$2^2 = h^2 + (1/2)^2$

$h = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 - 2 . \frac{1}{2} . 2 . \cos \theta$

$\cos \theta = ½$

41. O período da função definida por f(x) = sen $\left[3x - \frac{\pi}{2}\right]$ é

(A) $\frac{\pi}{2}$.

(B) $\frac{2\pi}{3}$.

(C) $\frac{5\pi}{6}$.

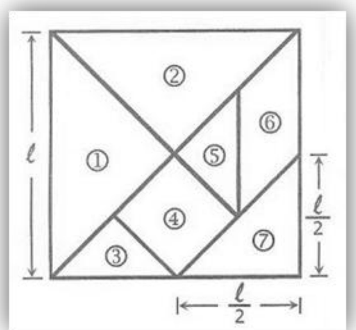
(D) π .

(E) 2π .

Resolução:

$3x = 2\pi \longrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

42. O tangran é um jogo chinês formado por uma peça quadrada, uma peça em forma de paralelogramo e cinco peças triangulares, todas obtidas a partir de um quadrado de lado l, como indica a figura abaixo



Três peças do tangram possuem a mesma área. Essa área é

(A) $\frac{l^2}{16}$.

(B) $\frac{l^2}{12}$.

(C) $\frac{l^2}{8}$.

(D) $\frac{l^2}{6}$.

(E) $\frac{l^2}{4}$.

Resolução: As áreas 4, 6 e 7 são iguais

$$A = \frac{B \times h}{2} = \frac{\frac{l}{2} \times \frac{l}{2}}{2} = \boxed{A = \frac{l^2}{8}}$$

43. O perímetro do triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio 3 é

(A) 18 $\sqrt{3}$. (B) 20 $\sqrt{3}$. (C) 36. (D) 15 $\sqrt{6}$. (E) 38.

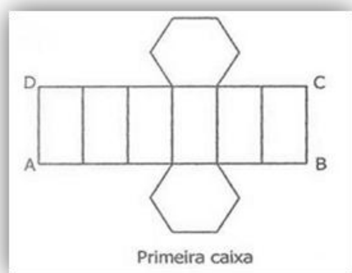
Resolução:

$h = 9$ $\quad h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 9$ $\quad l = \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$

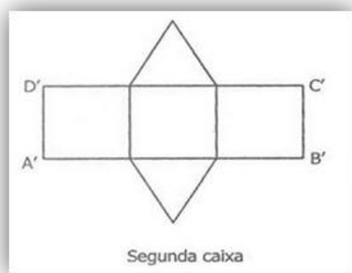
$\times\ 3$

$2l = 18\sqrt{3}$

44. Observe abaixo as planificações de duas caixas. A base de uma das caixas é um hexágono regular; a base da outra é um triângulo equilátero.



Primeira caixa

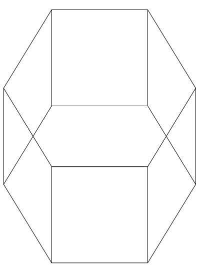


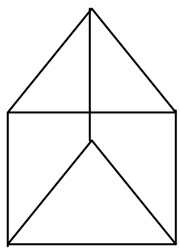
Segunda caixa

⟹ Se os retângulos ABCD e A'B'C'D' são congruentes, então a razão dos volumes da primeira e da segunda caixa é:

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) 1. **(D) $\frac{3}{2}$.** (E) 2.

Resolução: V_1 V_2



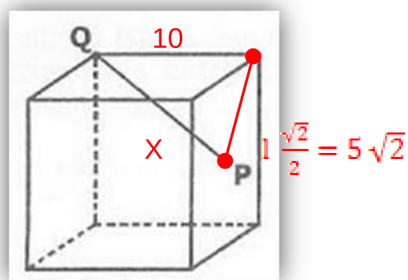


$V_1 = A_B \cdot h = \frac{6 \cdot l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h \qquad V_1 = 6 \cdot \frac{h \cdot l^2\sqrt{3}}{4}$

$V_2 = A_B \cdot h = \frac{(2l)^2\sqrt{3}}{4}\, h = \frac{4l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$

$V_2 = l^2\sqrt{3} \cdot h \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{6 \cdot \frac{\cancel{h}\,\cancel{l^2}\sqrt{3}}{4}}{\cancel{l^2}\cancel{\sqrt{3}} \cdot \cancel{h}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

45. Considere um cubo de aresta 10 e um segmento que une o ponto P, centro de uma das faces do cubo, ao ponto Q, vértice do cubo, como indicado na figura abaixo.



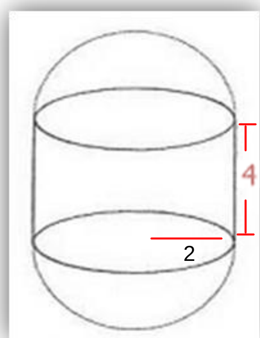
A medida do segmento PQ é

(A) 10. **(B) $5\sqrt{6}$.** (C) 12. (D) $6\sqrt{5}$ (E) 15.

Resolução:

$x^2 = 10^2 + (5\sqrt{2})^2 \rightarrow x = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$

46. Um reservatório tem forma de um cilindro circular reto com duas semiesferas acopladas em suas extremidades, conforme representado na figura abaixo.



O diâmetro da base e a altura do cilindro medem, cada um, 4dm, e o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

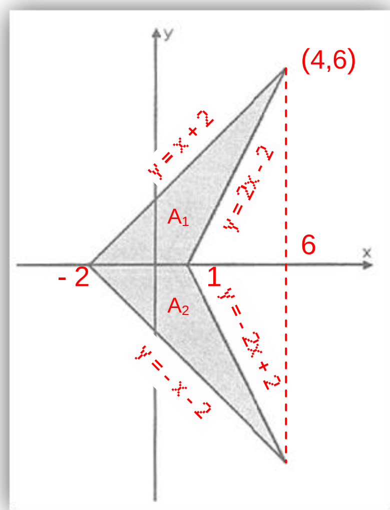
Dentre as opções abaixo, o valor mais próximo da capacidade do reservatório, em litros, é

(A) 50. (B) 60. (C) 70. **(D) 80.** (E) 90.

Resolução: $V_{RES} = V_{ESF} + V_{CIL} \longrightarrow V_T = \frac{4\pi r^3}{3} + A_{D} \cdot h \longrightarrow V_T = \frac{4 \cdot \pi \cdot 2^3}{3} + \pi \cdot 2^2 \cdot 4$

$\boxed{V_T = \frac{80\cancel{\pi}}{\cancel{3}} \cong 80}$

47. Os lados do quadrilátero da figura abaixo são segmentos das retas y = x + 2, y = - x – 2, y = - 2x + 2 e $y = 2x - 2$.



A área desse quadrilátero é

(A) 18. (B) 19. (C) 20. (D) 21. (E) 22.

Resolução: (A)

A) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$ $\quad x = 4,\ y = 6$

B) $\begin{cases} y = -x - 2 \\ Y = -2x + 2 \end{cases}$ $\quad x = 4,\ y = -6$

C) $y = 2x - 2$; $0 = 2x - 2 \longrightarrow x = 1$

D) $y = x + 2$; $0 = x + 2 \longrightarrow x = -2$

$$A = \frac{B \times h}{2} \longrightarrow A_1 = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \longrightarrow A_2 = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

$$A_T = A_1 + A_2 \longrightarrow \boxed{9 + 9 = 18}$$

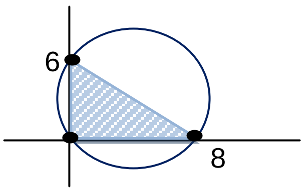
---

48. Os pontos de interseção do círculo de equação $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ com os eixos coordenados são vértices de um triângulo. A área desse triângulo é

(A) 22. **(B) 24.** (C) 25. (D) 26. (E) 28.

Resolução: Para $y = 0$ $\begin{cases} (0,0) \\ (8,0) \end{cases}$

Para $x = 0$ $\begin{cases} (0,0) \\ (0,6) \end{cases}$



$$A = \frac{B \times h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$$

---

49. O Google, site de buscas na internet criado há onze anos, usa um modelo matemático capaz de entregar resultados de pesquisas de forma muito eficiente. Na rede mundial de computadores, são realizadas, a cada segundo, 30.000 buscas, em média. A tabela abaixo apresenta a distribuição desse total entre os maiores sites de busca.

Sites	Buscas
Google	21.000
Yahoo	2.700
Microsoft	800
Outros	5.500
Total	30.000

De acordo com esses dados, se duas pessoas fazem simultaneamente uma busca na internet, a probabilidade de que pelo menos uma delas tenha usado o Google é

(A) 67%. (B) 75%. (C) 83%. **(D) 91%.** (E) 99%.

Resolução: Probabilidade de as duas não usarem o Google $\longrightarrow$ $P_A = \frac{9}{30} \cdot \frac{9}{30} = 9\%$

Probabilidade de pelo menos uma usar o Google $\longrightarrow$ $1 - 0{,}09 = 0{,}91 = 91\%$

50. Uma urna contém bolas numeradas de 1 até 15. Retirando-se da urna 3 bolas, sem reposição, a probabilidade de a soma dos números que aparecerem nessas bolas ser par é

(A) $\frac{1}{13}$ (B) $\frac{6}{13}$ (C) $\frac{28}{65}$ (D) $\frac{31}{65}$ **(E) $\frac{33}{65}$**

Resolução:

8 números impares
7 números pares

Para soma par temos: P + P + P ou I + I + P

P + P + P	I + I + P
C_7^3	$C_8^2 \cdot C_7^1$

$$\frac{C_7^3 + C_8^2 \cdot C_7^1}{C_{15}^3} = \frac{33}{65}$$